Fizyka, II rok FS, FiTKE, IS
Równania różniczkowe i całkowe, Zestaw 2a

1. Proszę zdefiniować pojęcie formy kwadratowej, a następnie podać macierz $\mathcal{A}$ formy kwadratowej $\phi(x_1, x_2, x_3)$ i określić rząd formy
   (a) $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
   (b) $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$
2. Proszę określić rząd równania różniczkowego
   (a) $\ln\left|u_{xx}u_{yy}\right| - \ln\left|u_{xx}\right| - \ln\left|u_{yy}\right| + u_x + u_y = 0$
   (b) $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_y^2 - 6u_y + u = 0$
   (c) $2\big(u_x - 2u\big)u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}\big(u_x - 2u\big)^2 - xy = 0$
   (d) $u_x u_{xy}^2 + \big(u_{xx} + u_y\big)^2 - 4x^2y^3 = 0$
3. Proszę określić typ równania różniczkowego (liniowe/nieliniowe/quasi–liniowe oraz jednorodne/niejednorodne)
   (a) $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{yy} - u = 0$
   (b) $x^2yu_{xxy} + 2e^xy^2u_{xy} - 2u = 0$
   (c) $3u_{xy} - u_{xx} + 12u_y + 2x - y = 0$
   (d) $u_y u_{xx} - x^3uu_{xy} + f(x, y, u) = 0$
   (e) $2\sin(x + y)u_{xx} - x\cos y u_{xy} + xyu_x = 0$
   (f) $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$
   (g) $uu_x + u^3 + x^2 + y = 1$, $u = u(x)$
   (h) $u_x^2 + uu_x + u = 0$
4. Określ typ równania różniczkowego (eliptyczne/hiperboliczne/paraboliczne)
   (a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2y = 0$
   (b) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$
   (c) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0$
   (d) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0$
   (e) $xu_{xx} + u_{yy} = 0$, podaj obszary w których zachowuje sie typ równania
   (f) $xu_{xx} - y^2u_{yy} = 0$, podaj obszary w których zachowuje się typ równania
5. Znajdź rozwiązanie ogólne następujących równań różniczkowych rzędu pierwszego
   (a) $\big(x^3 + 3xy^2\big)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$
   (b) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z^2y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
   (c) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 4y$
   (d) $\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = u$
   (e) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u-x}{3y^2}\frac{\partial u}{\partial y} = 1$
   (f) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2y$
6. Proszę rozwiązać podane niżej zagadnienia Cauchy'ego
   (a) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(1, y, z) = y + z^2$

(b) $\left(1+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $u(0,y)=y^2$

7. Zdefiniuj pojęcie zagadnienia Sturma–Liouville'a, a następnie rozwiąż zagadnienie

$$i\frac{d}{dx}u(x)=\lambda u(x).$$

Czy wartości własne λ są zdegenerowane, czy nie?

8. Określ typ podanych równań różniczkowych, a następnie sprowadź je do postaci kanonicznej

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

(c)

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Wskazówka: Podane równanie jest równaniem parabolicznym. Równania tego typu sprowadza się do postaci kanonicznej dokonując transformacji $(x,y)\to(\xi(x,y),\eta(x,y))$, gdzie $\xi(x,y)$ jest krzywą charakterystyczną, natomiast $\eta(x,y)$ jest dowolną funkcją zmiennych x,y niezależną od $\xi(x,y)$. Równania paraboliczne mają tylko jedną rodzinę krzywych charakterystycznych – z tego wynika dowolność przy ustalaniu drugiej *współrzędnej* nowego układu.

(d)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Wskazówka: Podane równanie jest równaniem eliptycznym. Równania tego typu mają dwie różne rodziny zespolonych krzywych charakterystycznych (podane to zostało na ćwiczeniach). Równania takie sprowadza się do postaci kanonicznej dokonując transformacji $(x,y)\to(\xi(x,y),\eta(x,y))$, gdzie krzywe charakterystyczne mają postać: $\varphi_1=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$, $\varphi_2=\xi(x,y)-i\eta(x,y)$.

9. Dane jest jednorodne równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

lub zapisane krócej przy użyciu operatora różniczkowego cząstkowego L_2

$$L_2u=0,\quad \text{gdzie}\quad L_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Wykaż, że gdy rozwiązaniami powyższego równania są funkcje $u_i(x,y)$, gdzie $i=1,2,3,\ldots$, to rozwiązaniem jest też funkcja postaci

$$u(x,y)=\sum_i u_i.$$

10. Podane równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sprowadź do jego postaci kanonicznej, a następnie wyznacz rozwiązanie spełniające warunki początkowe

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 3x^2, \\ \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} &= 0. \end{aligned}$$

11. Dane jest hiperboliczne równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

będące jednowymiarowym równaniem falowym, opisującym propagację fali płaskiej.

(a) Sprowadź równanie (1) do jego postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

(b) Stosując metodę charakterystyk wyznacz rozwiązanie ogólne równania (1) **i podaj jego interpretację**

(c) Wyznacz rozwiązanie równania (1) spełniające następujące niejednorodne warunki początkowe

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \lambda(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \mu(x) \end{aligned}$$

(d) Wyjaśnij dlaczego rozwiązania równania (1) nazywane są falami **płaskimi**.

12. Stosując metodę obrazów (inaczej: *metodę odbicia*) wyznacz rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

spełniające podane warunki początkowe

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \lambda(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big| t = 0 &= \mu(x) \end{aligned} \tag{2}$$

oraz warunek brzegowy

$$u(0,t) = 0.$$

(Jest to model nieskończonej struny zamocowanej z jednej strony).

13. Stosując metodę separacji (rozdzielenia) zmiennych wyznacz rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

w obszarze $x \in [0, L]$, czyli w obszarze ograniczonym płaszczyznami równoległymi $x = 0$ i $x = L$. Rozwiązanie powinno spełniać niejednorodne warunki początkowe postaci

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \mu(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \nu(x) \end{aligned}$$

oraz warunki brzegowe

(a)

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

(b)

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

14. Stosując metodę separacji zmiennych wyznacz rozwiązanie jednowymiarowego równania falowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

w jednowymiarowym obszarze $x \in [0, L]$, przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

oraz warunkach początkowych

$$\begin{aligned} u(x,0) &= a \cdot \sin\frac{\pi}{L}x, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

15. Stosując metodę separacji zmiennych wyznacz w obszarze $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$ rozwiązanie trójwymiarowego równania falowego dla $t > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

spełniające następujące warunki początkowe

$$\begin{aligned} u(x,y,z,0) &= u_0 = const. \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

oraz brzegowe

$$\begin{aligned} u(0,y,z,t) = u(a,y,z,t) = 0; &\quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \quad t > 0, \\ u(x,0,z,t) = u(x,b,z,t) = 0; &\quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c, \quad t > 0, \\ u(x,y,0,t) = u(x,y,c,t) = 0; &\quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Odpowiedzi:

(1a) forma rzędu trzeciego; (1b) forma rzędu drugiego;
(2a) rząd pierwszy; (2b) rząd pierwszy; (2c) rząd pierwszy; (2d) rząd drugi

(3a) nieliniowe; (3b) liniowe jednorodne; (3c) liniowe niejednorodne, (3d) quasi–liniowe; (3e) liniowe; (3f) nieliniowe; (3g) quasi–liniowe; (3h) nieliniowe;
(4a) hiperboliczne; (4b) eliptyczne; (4c) paraboliczne; (4d) hiperboliczne;
(4e) $x = 0$ – paraboliczne, $x > 0$ – eliptyczne, $x < 0$ – hiperboliczne;
(4f) $x > 0, y \neq 0$ – eliptyczne, $x < 0, y \neq 0$ – hiperboliczne, na prostych $x = 0$ i $y = 0$ – paraboliczne;
(5a) $u = G\big(\frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\big)$; (5b) $u = G\big(\frac{y}{x} + \frac{yz+1}{z}\big)$;
(5c) $G\big(\frac{y}{x}, 4y - u\big) = 0$; (5d) $G\big(x^3 - y, 3x - \ln|u|\big)$;
(5e) $G\big(x - u, y^3 + u^2 - xu\big) = 0$ lub np. $G\big(x - u, y^3 + ux - x^2\big) = 0$; (5f) $G\big(\frac{y}{x}, y + \frac{1}{u}\big) = 0$
(6a) $u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}$; (6b) $u(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2}$
(**7**) Funkcje własne są postaci $e^{-i\lambda x}$. Dla ustalonego λ, z każdą taką funkcją związana jest tylko jedna wartość własna równa λ. Jest to wieć przypadek bez degeneracji.
(**8a**) Podane równanie jest równaniem hiperbolicznym. Dla równań typu hiperbolicznego określa się dwie postacie kanoniczne. Pierwsza z nich to postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + f(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0.$$

Do takiej postaci podane równanie można sprowadzić wykonując transformację $(x, y) \to (\xi, \eta)$, gdzie $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, są krzywymi charakterystycznymi.

Druga postać kanoniczna to

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - f(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0.$$

(**8b**) Równanie hiperboliczne
(**8c**) Równanie paraboliczne
(**8d**)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial u}{\partial\eta} = 0, \quad \xi = 2x - y, \quad \eta = x$$

(**10**) $u(x, y) = \frac{1}{4}(y - 3x)^2 + \frac{3}{4}(y + x)^2$
(**11b**) Rozwiązanie ogólne ma postać

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$$

(**11c**) Rozwiązanie szczególne

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\lambda(x - at) + \frac{1}{2}\lambda(x + at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \mu(\xi)d\xi.$$

Jest to superpozycja dwóch fal, które propagują w przeciwnych kierunkach. Pierwsza z nich propaguje w lewo, druga w prawo.
(**12**) Rozwiązanie jest postaci

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\lambda(x + ct) - \frac{1}{2}\lambda(ct - x) + \int_{ct-x}^{ct+x} \mu(\xi)d\xi.$$

Rozwiązywane równanie stanowi model drgającej struny zamocowanej z lewej strony. W tym przypadku początkowe wychylenie $\lambda(x)$ dzieli się na dwie części (dwie fale), z których jedna porusza się z prędkością c w prawo, a druga z tą samą prędkością propaguje w lewo i dotarłszy do punktu $x = 0$, gdzie drgająca struna jest zamocowana, odbija się i zaczyna poruszać się w prawo. Po odbiciu zmienia się *znak* amplitudy fali.
(**14**) Rozwiązanie spełniające jedynie warunki brzegowe (bez rozpatrywania warunków początkowych) jest postaci

$$u(x, t) = \sum_n \sin(k_n x)\big(c_n \cos\omega_n t + d_n \sin\omega_n t\big).$$

Rozwiązanie spełniające zarówno warunki brzegowe jak i początkowe ma postać

$$u(x,t) = a = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{c\pi}{L}t\right)$$

(**15**) Rozwiązanie równania spełniające jedynie warunki brzegowe ma postać

$$u(x,y,z,t) = \sum_{k,m,n} B_k D_m F_n \sin(K_k x)\sin(M_m y)\sin(N_n z)\big(G_{kmn}\cos(\lambda_{kmn} vt) + H_{kmn}\sin(\lambda_{kmn} vt)\big).$$

Takie rozwiązanie należy następnie dopasować do podanych warunków początkowych, które na tym etapie nie zostały jeszcze uwzględnione (powyższe rozwiązanie spełnia jedynie warunki brzegowe). Rozwiązanie spełniające warunki początkowe ma postać

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \sum_{k,m,n} B_k D_m F_n G_{kmn}\sin(K_k x)\sin(M_m y)\sin(N_n z)\cos(\lambda_{kmn} vt) \\ &= \sum_{k,m,n} L_{kmn}\sin(K_k x)\sin(M_m y)\sin(N_n z)\cos(\lambda_{kmn} vt), \end{aligned}$$

przy czym, wyznaczone z pierwszego warunku początkowego współczynniki L_{kmn} są równe

$$L_{kmn} = \frac{64u_0}{\pi^3}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)(2n-1)}$$

Pytania, uwagi, komentarze? → bwolf@rudy.mif.pg.gda.pl lub środa, godz. 13.15–14.15