Zestaw 4

1. Wyprowadź postać operatorów następujących wielkości fizycznych
   (a) energii kinetycznej N cząstek poruszających się w kierunku osi x,
   (b) energii kinetycznej N cząstek poruszających się w dowolnym kierunku,
   (c) średniego odchylenia kwadratowego wielkości fizycznej A,
   (d) składowych $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ momentu pędu $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ pojedynczej cząstki. Wykaż przy tym, że zachodzą związki

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= \varepsilon_{ijk}\hat{L}_k, \\ [\hat{L}_i, \hat{L}^2] &= 0, \qquad \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \qquad i \in \{x, y, z\} \end{aligned}$$

2. Niech układ kwantowy opisany jest funkcją falową $\psi(x)$. Traktując położenie x i pęd p_x jako zmienne losowe
   (a) uzasadnij, że wartość średnia położenia jest równa

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x|\psi(x)|^2$$

   (b) wykaż, że wartość średnia pędu jest równa

$$\langle \hat{p}_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \hat{p}_x \psi(x).$$

   W tym przypadku należy przedstawić funkcję falową $\psi(x)$ jako pakiet falowy o profilu $a(k)$.

3. Stosując notację Diraca udowodnij, że stany (wektory) własne danego operatora $\hat{Q}$ odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

4. Niech dany jest niezależny od czasu operator $\hat{Q}$. Udownodnij, że średnia $\langle Q \rangle$ spełnia następujący związek

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle.$$

5. Obserwabla Q reprezentowana przez operator $\hat{Q}$ komutujący z operatorem energii – hamiltonianem $\hat{H}$ – nazywana jest stałą ruchu.
   Wykaż, że dla każdej stałej ruchu Q spełniony jest warunek $\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = 0$.
   Które z wielkości fizycznych: położenie $\mathbf{r}$, pęd $\mathbf{p}$, moment pędu $\mathbf{L}$, energia kinetyczna T są stałymi ruchu. Odpowiedź uzasadnij rachunkiem.

6. Twierdzenie wirialne. Niech x, p, T, $V(x)$ są odpowiednio położeniem, pędem, energią kinetyczną oraz energią potencjalną układu fizycznego.
   (a) Udowodnij, że zachodzi następująca relacja

$$\frac{d}{dt}\langle xp \rangle = 2\langle T \rangle - \langle x\frac{dV(x)}{dx} \rangle.$$

   (b) Udowodnij, że dla stanów stacjonarnych (zdefiniuj pojęcie stanu stacjonarnego) powyższa relacja sprowadza się do równania

$$2\langle T \rangle = \langle x\frac{dV}{dx} \rangle$$

   stanowiącego treść tzw. **twierdzenia wirialnego**.

(c) Pokaż, że dla potencjałów postaci $V(x) = ax^s$, gdzie $a, s = const. \in \mathbb{R}$, wartość oczekiwana energii kinetycznej układu kwantowego jest równa

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} s \, \langle V(x) \rangle.$$

7. TWIERDZENIE EHRENFESTA. Udowodnij, że prawdziwa jest postać kwantowo–mechanicznych równań ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle x \rangle &= \frac{1}{m}\langle p_x \rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle p_x \rangle &= -\langle \nabla V(x) \rangle \end{aligned}$$

dla wartości oczekiwanych położenia x i pędu p_x cząstki poruszającej się w polu siły o potencjale $V(x)$. Równania te stanowią treść tzw. **twierdzenie Ehrenfesta**.

8. Wyprowadź ogólną zasadę Heisenberga dla dwóch wielkości fizycznych reprezentowanych przez operatory $\hat{A}$ i $\hat{B}$, przy czym załóż, że $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}$.

9. Korzystając z ogólnej zasady Heisenberga pokaż, że dwie wielkości są jednocześnie mierzalne z dowolną dokładnością, jeżeli ich operatory komutują. Czy dwie wielkości mogą być jednocześnie mierzalne, gdy ich komutator nie zeruje się?
Podaj warunki, przy których można jednocześnie mierzyć

   (a) energię i składowe pędu cząstki. Podaj przykład układu posiadającego tę własność,

   (b) wszystkie składowe momentu pędu,

   (c) kwadrat momentu pędu i składowe momentu pędu

10. Wykaż, że współrzędne i pędy cząstki w nieskończonym pudle potencjału w dowolnym stanie własnym spełniają zasadę Heisenberga.

11. Dwa stany cząstki swobodnej poruszającej się wzdłuż osi x opisują funkcje e^{ikx} oraz e^{-ikx} będące rozwiązaniami równania własnego operatora energii, gdzie $k = 2mE/\hbar^2$.
Oblicz średni pęd cząstki i określ na tej podstawie kierunek ruchu cząstki w obu stanach.