Ruch chaotyczny wahadła.

Drgania wymuszone wahadła:

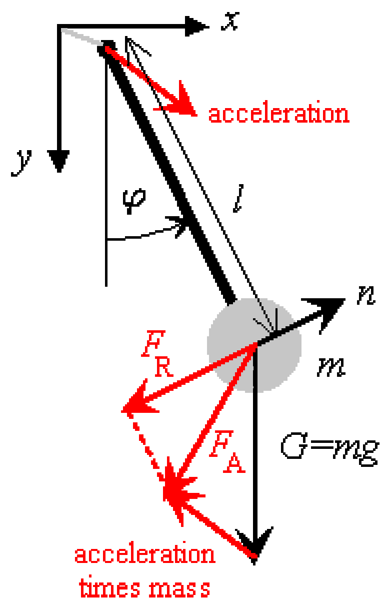
a) Ruch punktu zaczepienia:

siła bezwładności działająca na masę w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z punktem zaczepienia.

b) Periodyczna siła wymuszająca

$$- \quad \ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = F_0 \cos\omega_D t$$

a).



Całkowita siła działająca na m:

$$F_A = -m\frac{d^2x_0}{dt^2}e_x + m\left(g - \frac{d^2y_0}{dt^2}\right)e_y$$

$x_0(t)$, $y_0(t)$ - współrzędne punktu zawieszenia,

e_x, ,e_y - wersory w kierunku x i y

Siła zwrotna styczna do okręgu o promieniu ℓ, rzut F_A na wektor jednostkowy $n = \cos\varphi\, e_x - \sin\varphi\, e_y$:

$$F_R = nF_A = -m\frac{d^2 x_0}{dt^2}\cos\varphi - m\left(g - \frac{d^2 y_0}{dt^2}\right)\sin\varphi$$

Równanie ruchu:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\sin\varphi = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{x_0}{\ell}\right)\cos\varphi + \\ + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y_0}{\ell}\right)\sin\varphi$$

Ruch poziomy:

$$x_0 = A\cos\omega_D t$$

$$y_0 = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\sin\varphi = a\cos\omega_D t\cos\varphi$$

Ruch pionowy:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = A\cos\omega_D t$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\sin\varphi = -a\cos\omega_D t\sin\varphi$$

Ruch obrotowy:

$$x_0 = A\sin\omega_D t\,;\quad y_0 = A\cos\omega_D t$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\sin\varphi = a\sin(\omega_D t - \varphi)$$

$$a = \omega^2 A/\ell$$

b)

Dla siły wymuszającej $F_0\cos\omega_D t$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{Q}\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = a\cos\omega_D t$$

Inaczej:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{1}{Q}\omega - \sin\theta + a\cos\varphi \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_D \end{cases}$$

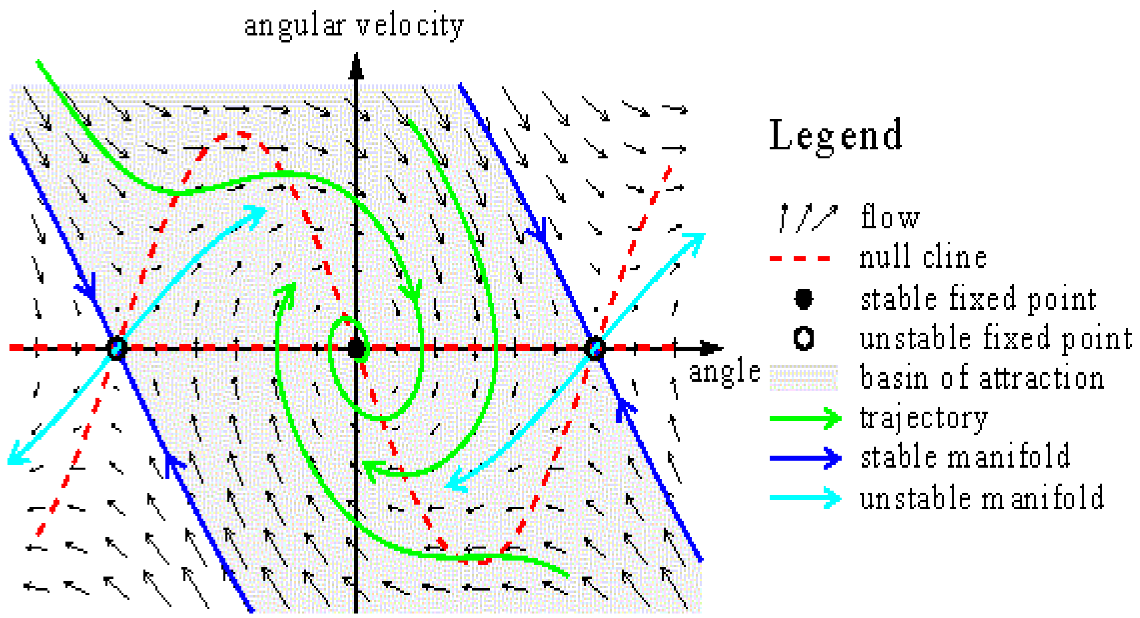
- więcej niż dwie zmienne dynamiczne
- nieliniowe sprzężenie zmiennych

$$\Downarrow$$

W zależności od parametrów oscylacje okresowe z częstością siły wymuszającej, występowanie drgań harmonicznych i subharmonicznych, ruch chaotyczny.

Przestrzeń fazowa:

Możliwe stany układu. Każdy punkt odpowiada jednemu stanowi.



Trajektoria: rozwiązanie równania ruchu. Krzywa w przestrzeni fazowej sparametryzowana zmienną czasową.

Trajektorie fazowe:

- trajektorie nie przecinają się,
- dla układu zachowawczego pole powierzchni nie zmieni się.

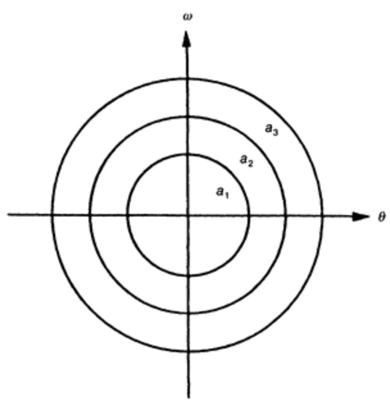
Np. wahadło swobodne w przybliżeniu liniowym:

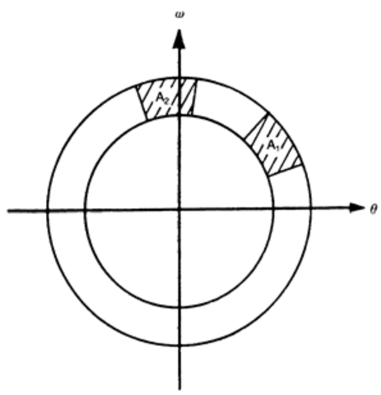
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0$$

Niech $\omega \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = -\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$$

$\theta = a_i \sin \omega t$; $\omega = a_i \cos \omega t$





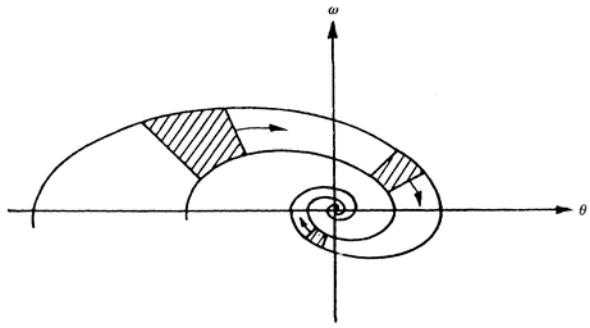
Wahadło tłumione w przybliżeniu liniowym:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$$

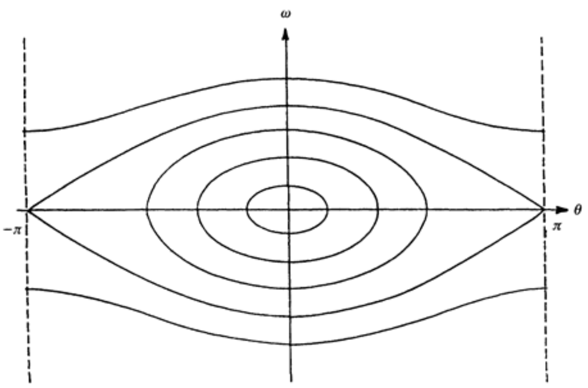
$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = -\omega - \theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$$

-

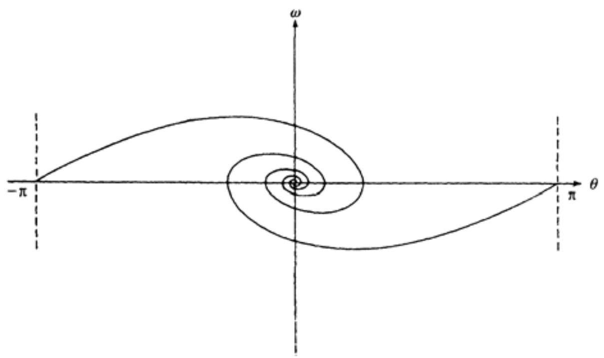
-
-
-
-
-



Portret fazowy nieliniowego wahadła bez tłumienia:



Portret fazowy nieliniowego wahadła tłumionego:

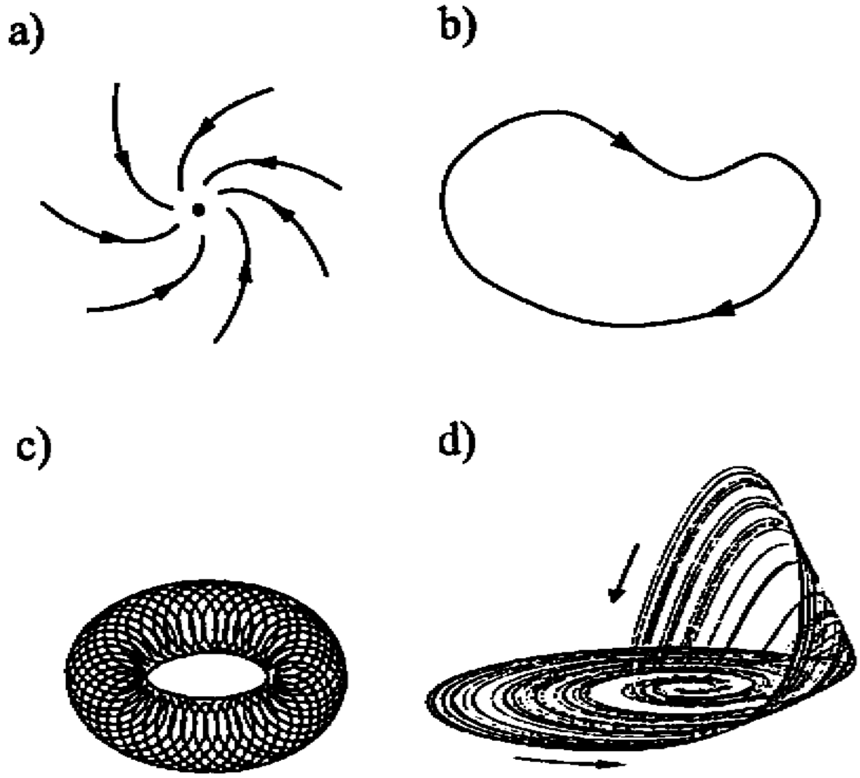


- dla układu dyssypatywnego pole powierzchni fazowej maleje.
- trajektorie dążą do atraktora

Atraktor: obszar w przestrzeni fazowej (ograniczony), do którego asymptotycznie, dla długich czasów, przyciągane są wszystkie dostatecznie bliskie trajektorie (z tzw. obszaru przyciągania).

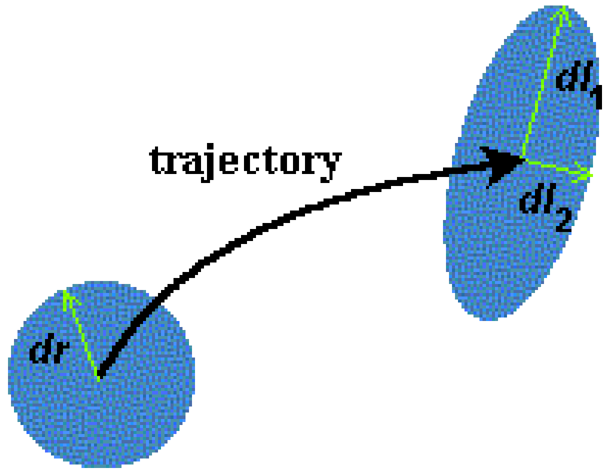
Dziwny: wrażliwy na warunki początkowe.

a) - położenie równowagi, b) – orbita okresowa,
c) – orbita quasiokresowa, d) – atraktor chaotyczny.



Kryterium ilościowe – wykładnik Lapunowa.

Wykładnik Lapunowa:



$\overline{R}(0)$ - stan początkowy układu,

$\overline{R}(t)$ - trajektoria układu.

Chaos pojawia się, gdy istnieje nieprzeliczalny zbiór trajektorii sąsiadujących dla $t = 0$, które oddalają się wykładniczo dla dużych czasów:

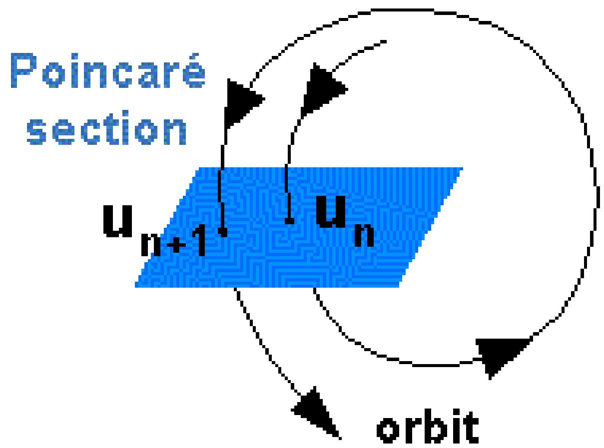
$$\lim_{t\to\infty} \left|\Delta R(t)\right| \cong \left|\Delta \overline{R}(0)\right| \exp(\lambda t); \quad \lambda > 0$$

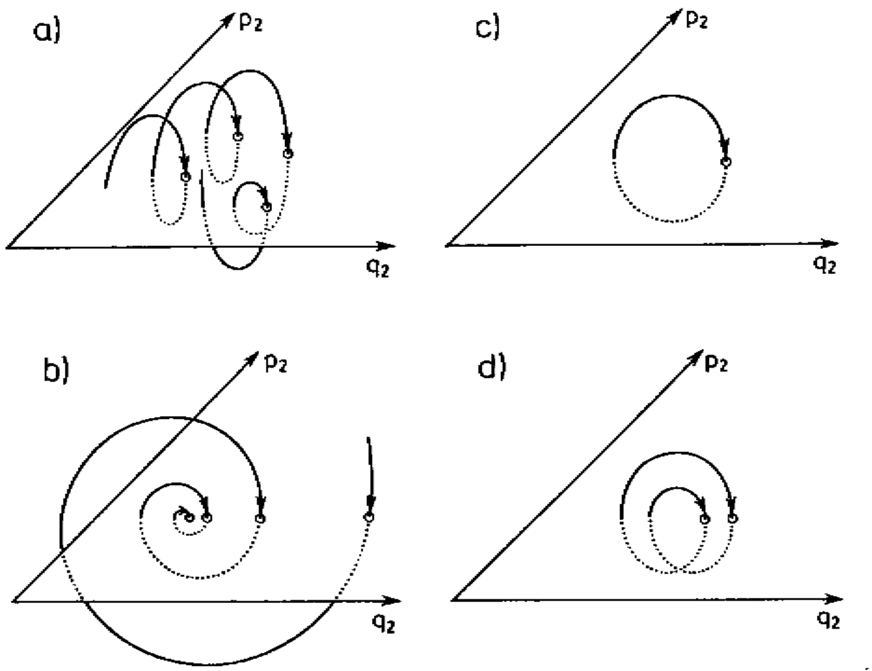
$$\lim_{t\to\infty} \left[t^{-1} \ln\left|\Delta R(t)\right|\right] = \lambda > 0$$

Dla rysunku: $\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \left[t^{-1} \ln \frac{dl_i(t)}{dr} \right]$ gdzie l_i-długość i-tej osi głównej elipsoidy.

-

Przekrój Poincarego:

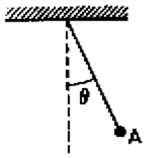
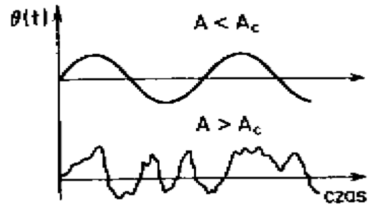
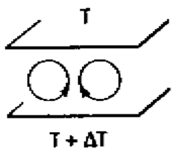
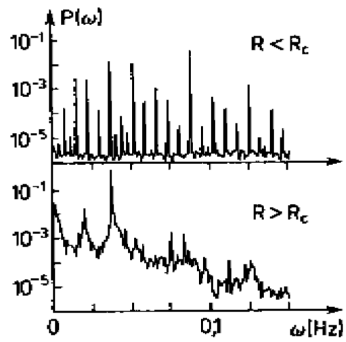
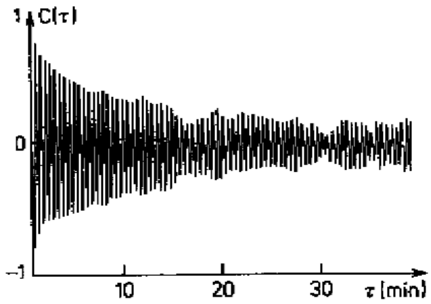
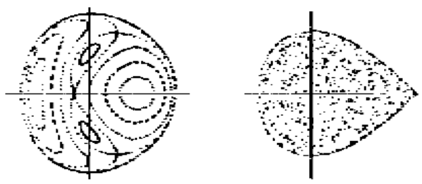




Kryteria chaotyczności ruchu (wg Schustera):

- czasowa zależność sygnału (wychylenia) od czasu „wygląda" chaotycznie,
- w widmie mocy występuje szerokopasmowy szum,
- raptowny zanik korelacji między kolejnymi sygnałami,
- w odwzorowaniu Poincarego punkty wypełniają przestrzeń.

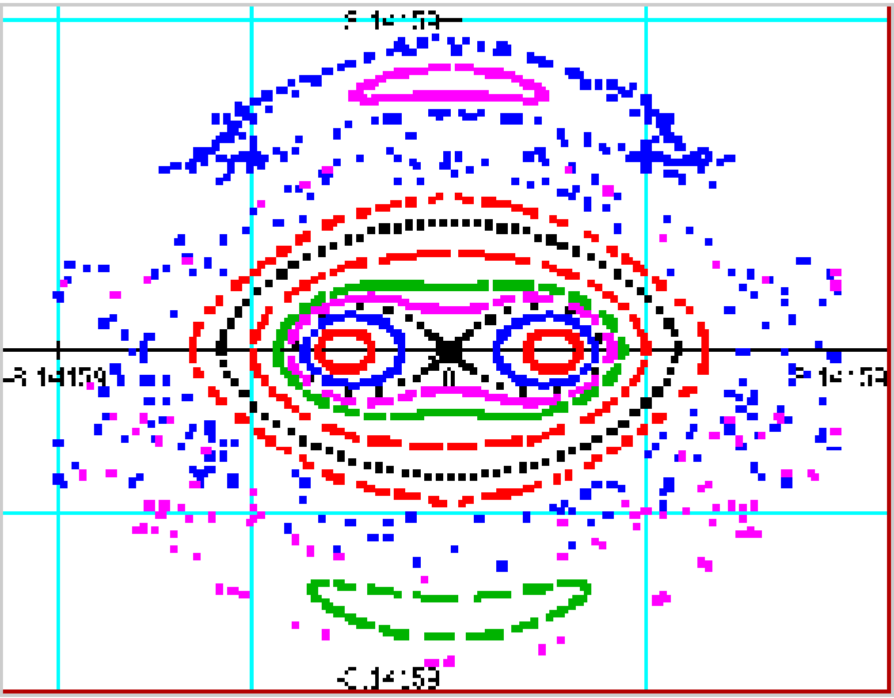
Tabela 2. Wykrywanie chaosu w prostych układach

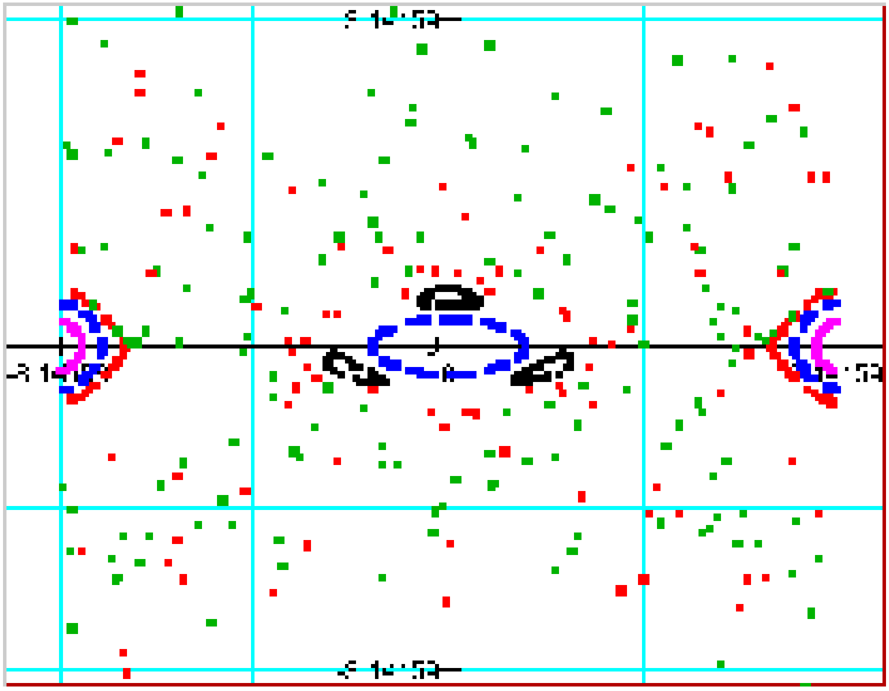
Układ	Równania ruchu	Oznaka chaosu
Wahadło 	$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + g\sin\theta = A\cos\omega t$ $x = \theta,\quad y = \dot{\theta},\quad z = \omega t$ $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -\gamma y - g\sin x + A\cos z$ $\dot{z} = \omega$	Sygnał 
Doświadczenie Bénarda 	$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$ $\dot{y} = rx - y - xz$ $\dot{z} = xy - bz$	Widmo mocy 
Reakcja Bielousowa-Żabotyńskiego $Ce_2(SO_4)_3 \ldots Ce^{4+}$	$\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}, \lambda)$ $\boldsymbol{x} = [c_1,\ c_2, \ldots, c_d]$	Funkcja korelacji 
Układ Hénona-Heilesa	$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(p_i^2 + q_i^2) +$ $+ q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3$ $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},\quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$	Odwzorowanie Poincarégo 

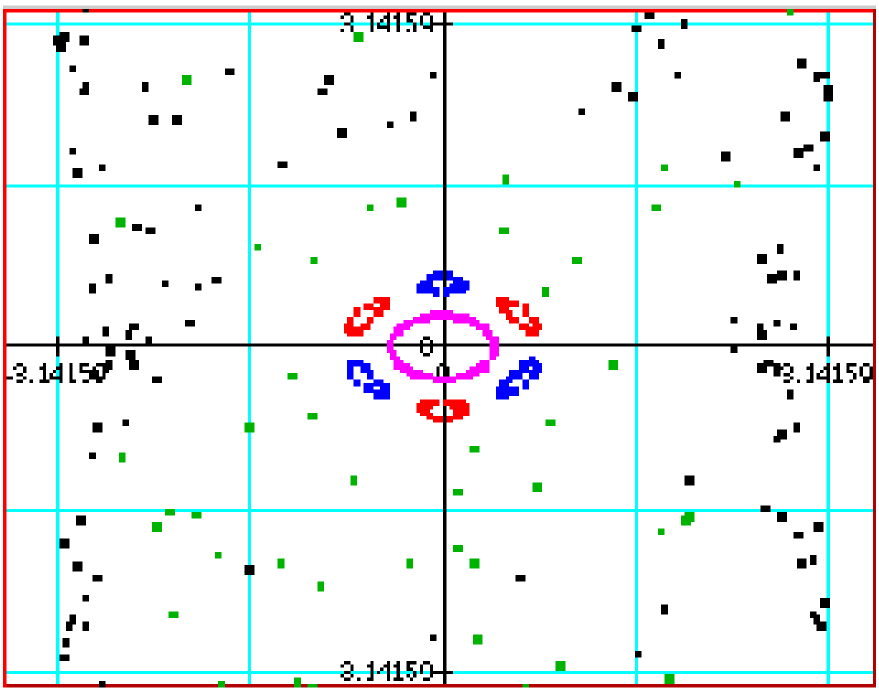
Przykład: wahadło z drgającym punktem zaczepienia:

W zależności od warunków początkowych, *h* oraz *ω* ruch periodyczny, regularny lub chaotyczny.

Na płaszczyźnie fazowej zaznaczamy kąt i prędkość kątową w momentach, gdy punkt zawieszenia wahadła zajmuje najniższe położenie (przekrój Poincaré).







Położenia punktów, choć rozrzucone nieregularnie, są określone przez równanie różniczkowe i warunki początkowe – chaos deterministyczny.

Układ chaotyczny jest wrażliwy na stan początkowy.
W układzie chaotycznym nieregularność wynika z dynamiki układu, a nie, jak w zachowującym się podobnie układzie stochostycznym na przykład z nieprzewidywalnego wpływu otoczenia.
Zachowanie układu chaotycznego, choć nieregularne, jest określone przez równania różniczkowe i warunki początkowe – chaos deterministyczny.