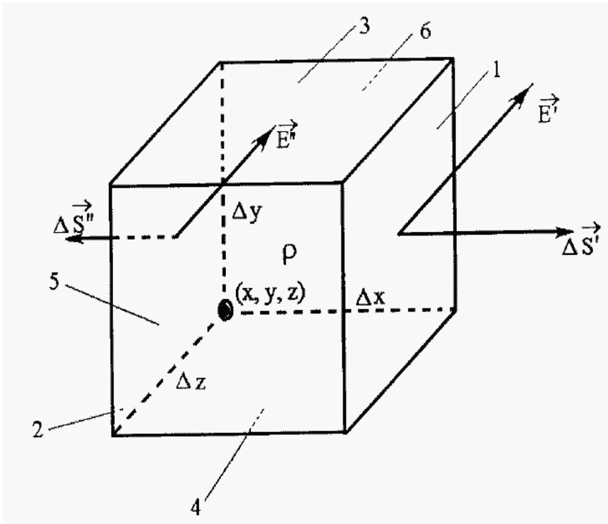
Różniczkowe prawo Gaussa i co z niego wynika...

Niech ładunek będzie rozłożony w objętości V z ciągłą gęstością $\rho(x,y,z)$. Wytworzone przez ten ładunek pole elektryczne będzie również zmieniać się w przestrzeni w sposób ciągły. Obliczmy strumień tego pola przez powierzchnię bardzo



małego prostopadłościanu. Strumień przez ścianki prostopadłe do osi x wynosi

$$\Delta\Phi_x = \vec{E}'\cdot\Delta\vec{S}' + \vec{E}''\cdot\Delta\vec{S}'' = (E'_x - E''_x)\Delta y\Delta z$$

Ponieważ różnica natężeń E'_x - E''_x jest z założenia bardzo mała, możemy ją zapisać jako

$$(E'_x - E''_x) = E_x(x+\Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)$$

$$(E'_x - E''_x) \approx E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x - E_x(x, y, z) = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x$$

Wobec tego mamy

$$\Delta\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V$$

Podobnie liczymy strumień przez ścianki prostopadłe do pozostałych osi

$$\Delta\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta V\,;\Delta\Phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta V$$

Całkowity strumień wyniesie

$$\Delta \Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

Wyrażenie w nawiasie jest z definicji dywergencją pola wektorowego ***E***. Zapisując to z użyciem operatora nabla:

$$\Delta \Phi = \nabla \vec{E} \, \Delta V$$

Możemy to przeczytać: dywergencja pola elektrycznego w danym punkcie jest równa strumieniowi pola elektrycznego na jednostkę objętości. Porównajmy to z prawem Gaussa

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \, \Delta V}{\varepsilon_0}$$

Porównując dwa ostatnie równania otrzymujemy

różniczkowe prawo Gaussa

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Otrzymaliśmy lokalny związek między natężeniem pola elektrycznego a gęstością ładunku w danym punkcie.

Widzimy, że gdy w pewnym obszarze nie ma ładunków dywergencja natężenia pola zanika. Takie pola nazywa się często *bezźródłowym*.

W miejsce natężenia pola możemy wstawić gradient potencjału

$$\nabla \vec{E} = \nabla(-\nabla \varphi) = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = -\nabla^2 \varphi$$

Otrzymaliśmy w ten sposób

równanie Poissone'a

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Jest to równanie różniczkowe umożliwiające znalezienie potencjału w przestrzeni, w której znamy rozkład ładunku. Do jego rozwiązania potrzebne są zwykle również warunki brzegowe.

Jeżeli w danym obszarze nie ma ładunków otrzymujemy równanie nazywane

równaniem Laplace'a

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$$

Do jego rozwiązania potrzebujemy jedynie warunków brzegowych.

Obydwa równania należą do najbardziej fundamentalnych w elektrodynamice teoretycznej, występują również w mechanice ośrodków ciągłych, teorii grawitacji, zjawiskach transportu i wielu innych dziedzinach nauki i techniki.

Zapisaliśmy prawo Gaussa w postaci różniczkowej. Możemy podobnie zapisać fakt, że praca przesunięcia ładunku wykonana na drodze zamkniętej jest równa zeru:

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{l} = q \oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

Policzmy na przykład wartość całki po zamkniętym konturze skierowanym zgodnie z osią *z*, leżącym w płaszczyźnie *xy*:

$$\Delta\Gamma = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = E_x \Delta x + (E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x)\Delta y - (E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y)\Delta x - E_y \Delta y$$

$$\Delta\Gamma = (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})\Delta y \Delta x$$

Zdefiniujmy teraz składową zetową ***rotacji****:*

$$(rot\, \vec{E})_z = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

podobnie definiujemy pozostałe składowe

$$(rot\, \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$(rot\, \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Zerowanie się wszystkich składowych rotacji możemy zapisać teraz tak:

$$rot\, \vec{E} = 0$$

lub z symbolicznie użyciem operatora nabla

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Pole, którego rotacja zanika nazywa się ***bezwirowym***. Możemy próbować sobie wyobrazić, że niemożliwe jest wytworzenie pola elektrycznego o zamkniętych liniach sił.

Warto zwrócić uwagę, że wyprowadzając równania różniczkowe pola przeszliśmy do opisu jego własności lokalnych.

Do naszych równoważnych stwierdzeń dotyczących zachowawczości pola elektrycznego dodamy jeszcze jedno:

Siła kulombowska jest siłą zachowawczą, czyli praca wykonana przy przesunięciu ładunku między dwoma punktami nie zależy od drogi przesunięcia.

Praca wykonana w polu sił elektrycznych przy przesunięciu ładunku po drodze zamkniętej jest równa zeru.

Pole elektryczne jest polem potencjalnym, to znaczy istnieje taka skalarna funkcja położenia ϕ, zwana potencjałem, że

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

Pole elektryczne jest bezwirowe, to znaczy jego rotacja zanika w całej przestrzeni

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Policzmy

Jeżeli z trzech wielkości: potencjału, natężenia pola i gęstości ładunku znamy jedno, to możemy obliczyć pozostałe.

-- Na przykład wychodząc z potencjału:

$$\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla \vec{E}$$

Potencjał równomiernie naładowanej kuli opisany jest zależnością

$$\varphi = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right)$$

Obliczyć wartość natężenia pola E na powierzchni kuli.

Do przemyślenia w długie i ciemne wieczory:

Cztery z przedstawionych pól mają w przedstawionym obszarze zanikającą dywergencję, a trzy znikającą rotację. Spróbuj się zastanowić, które z nich mogą mieć te cechy. (W.M. Purcell, str. 96)