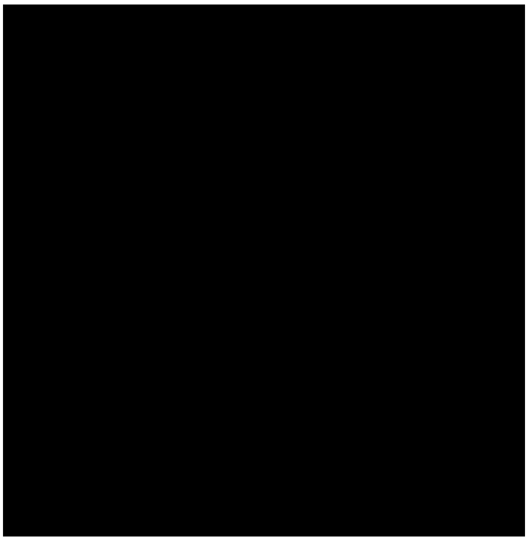
Potencjał pola elektrycznego

Pole elektryczne jest polem zachowawczym, czyli praca wykonana przy przesunięciu ładunku pomiędzy dwoma punktami nie zależy od tego po jakiej drodze przesuwamy ładunek. Spróbujemy to udowodnić. Rozważmy pracę wykonaną przy przesunięciu ładunku *q* pomiędzy punktami *A* i *B*. Siła działająca na ładunek q wynosi

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



pracę ΔW na odcinku Δl policzymy jako

$$\Delta W = \vec{F}\,\Delta\vec{l} = q\vec{E}\,\Delta\vec{l} = E\,\Delta l\cos\theta = E\,\Delta r$$

Zatem praca ΔW nie zależy od kąta θ, ale jedynie od długości odcinka Δr. Praca wykonana na całej drodze AB będzie zatem wynosić

$$W_{AB} = q\int_{A}^{B}\vec{E}\,d\vec{l} = q\int_{r_A}^{r_B} E\,dr$$

gdzie r_A i r_B oznaczają odległości punktów od ładunku *Q*. Widać zatem, że praca nie zależy od drogi całkowania, ale jedynie od odległości punktów *A* i *B* od centrum działania siły. Zauważmy jeszcze, że w rezultacie:

praca wykonana w polu elektrycznym przy przeniesieniu ładunku na krzywej zamkniętej jest równa zeru;

Korzystając z zasady superpozycji pól elektrycznych nasze stwierdzenia można uogólnić na pole elektryczne wytworzone przez ***dowolny układ ładunków***;

Praca W_{AB} określa jednoznacznie zmianę ***energii potencjalnej*** przy przeniesieniu od punktu A do B.

Dla ładunków punktowych pracę można łatwo obliczyć. Ponieważ natężenie pola od pojedynczego ładunku Q wynosi

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

zatem

$$W_{AB} = q\int_{r_A}^{r_B} E\,dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

Widzimy, że skoro praca jest równoważna zmianie energii potencjalnej, to energię potencjalną oddziaływania dwóch ładunków q i Q znajdujących się w odległości r możemy zapisać

$$Ep = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

Wyrażenie na W_{AB} mówi o różnicy energii potencjalnych, zatem sama energia E_P jest przez nie określona jedynie z dokładnością do stałej - co zresztą w przypadku energii potencjalnej zawsze ma miejsce. Często przyjmuje się, że punkt zera energii potencjalnej “znajduje się w nieskończoności”, czyli gdy ładunki są bardzo od siebie odległe.

Energia Ep w zależności od znaków ładunków może być zarówno dodatnia, jak i ujemna. Co to oznacza?

Gdy interesuje nas samo pole elektryczne, wytworzone przez ładunek *Q,* i chcemy uniezależnić się od umieszczonego w nim ładunku q możemy postąpić z energią potencjalną podobnie jak w przypadku siły i natężenia pola: możemy podzielić ją przez ładunek *q*. W ten sposób definiujemy w danym punkcie

potencjał pola elektrycznego:

$$\varphi = \frac{Ep}{q}$$

Jest to oczywiście wielkość skalarna, a jej jednostkę oznaczamy zwykle przez V i nazywamy woltem

$$[\varphi] = \frac{J}{C} = \frac{N * m}{C} = V$$

Pracę przy przemieszczeniu ładunku *q* z punktu *A* do punktu *B* możemy teraz wyrazić przez:

$$q(\varphi_A - \varphi_B) = W_{AB} = q\int_A^B \vec{E}\,\vec{dl}$$

Jeżeli końcowy punkt całkowania *B* nieskończenie oddala się od ładunków wytwarzających pole elektryczne, to otrzymujemy często stosowane wyrażenia na potencjał w punkcie, którego położenie określa wektor **r**:

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}\,\vec{dl}$$

Jak wynika z wyrażenia na energię potencjalną w polu elektrycznym od ładunku punktowego w tym wypadku potencjał będzie miał postać

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Jeżeli pole jest wytwarzane przez *n* ładunków punktowych Q_i, $i=1,..,n$, to możemy skorzystać z zasady superpozycji:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

W przypadku gdy wytwarzający pole ładunek jest rozłożony w sposób ciągły, musimy podzielić go na odpowiednio małe ładunki cząstkowe i sumowanie zastąpić całką:

$$\varphi = \int_V \frac{\varrho\, dV}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Warto zwrócić uwagę, że potencjał liczy się zwykle prościej niż natężenie pola elektrycznego: nie potrzeba znajdować trzech składowych, a tylko jeden skalar. Ponadto nie komplikują sprawy różne kierunki wektorów. Warto zatem nauczyć się wyznaczania natężenia pola z potencjału... Weźmy pod uwagę mały przyrost potencjału pomiędzy bliskimi punktami *(x, y, z)* i *(x+dx, y+dy, z+dz)*:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

przyrost potencjału można też wyrazić jako

$$d\varphi = -\vec{E}\, d\vec{s}$$

równanie pierwsze otrzymamy jeżeli w drugim wyrazimy natężenie pola elektrycznego przez gradient potencjału:

$$\vec{E} = -\hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx - \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy - \hat{z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = -\nabla\varphi$$

Często do zagadnienia potencjału pola podchodzi się od odwrotnej strony niż to uczyniliśmy my i sprawę stawia się tak:

Pole wektorowe E(r) nazywamy potencjalnym jeżeli istnieje pole skalarne ϕ(r), zwane potencjałem, takie że

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

Warto zwrócić uwagę, że skoro gradient skierowany jest w stronę maksymalnego wzrostu potencjału, to minus gradient pokazuje kierunek, w którym potencjał najbardziej maleje. ***Zatem natężenie pola elektrycznego będzie skierowane tam, gdzie najbardziej maleje potencjał***.

W ekstremach potencjału pole elektryczne zanika. Zanika zatem i siła - mamy punkty równowagi (trwałej w minimach energii potencjalnej i nietrwałej w maksimach).

Jeżeli w jakimś obszarze potencjał jest stały, to zanika w nim pole elektryczne.

Jeżeli na jakiejś powierzchni potencjał jest stały, to wektor pola elektrycznego jest do niej prostopadły . Takie powierzchnie nazywamy ekwipotencjalnymi.

Warto sobie uzmysłowić, że choć potencjał wprowadzaliśmy korzystając z pojęcia energii potencjalnej, to jest on zupełnie czymś innym od energii. Energia potencjalna określa pracę konieczną do uzyskania pewnej konfiguracji układu - możemy powiedzieć, że jest to energia zmagazynowana w układzie. Potencjał zaś charakteryzuje pole elektryczne w każdym punkcie przestrzeni.

Skoro potencjał jest i tak dany z dokładności ą do stałej, często wygodniej posługiwać się różnicą potencjałów między dwoma punktami. Taką różnicę nazywamy ***napięciem***. Jednostką napięcia jest oczywiście wolt. Jaki jest sens fizyczny napięcia?

Zanim zabierzemy się do liczenia przykładów możemy nasze rozważania o energii potencjalnej i potencjale podsumować za pomocą następujących równoważnych stwierdzeń:

Siła kulombowska jest siłą zachowawczą, czyli praca wykonana przy przesunięciu ładunku między dwoma punktami nie zależy od drogi przesunięcia.

Praca wykonana w polu sił elektrycznych przy przesunięciu ładunku po drodze zamkniętej jest równa zeru.

Pole elektryczne jest polem potencjalnym, to znaczy istnieje taka skalarna funkcja położenia φ, zwana potencjałem, że

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

Do policzenia

-- Powróćmy do konfiguracji ładunku dla których liczyliśmy natężenie pola z prawa Gaussa. Jaki będzie potencjał pola wytworzonego przez ładunek w kształcie jednorodnej kuli? Nieskończonej płaszczyzny?

-- Policz energię oddziaływania ładunków +Q i -Q ułożonych naprzemiennie w linii prostej (model jednowymiarowej jonowej sieci krystalicznej). Zwróć uwagę, że jest ona proporcjonalna do energii oddziaływania pojedynczych ładunków. Współczynnik proporcjonalności nazywa się stałą Madelunga - jest ona wielkością charakteryzującą typ struktury krystalicznej.

Do przemyślenia w długie zimowe wieczory:

-- Jak wszyscy wiemy, napięcie w sieci energetycznej naszych mieszkań wynosi 220V (już niedługo trochę wzrośnie). Ile elektronów musi przepłynąć między bolcami wtyczki czajnika, by zagotować litr wody? Porównaj ją z ładunkiem typowo występującym w naszych doświadczeniach elektrostatycznych.

-- Półkolista czasza naładowana jest ze stałą gęstością powierzchniową σ. Wykaż, że koło będące "podstawą" czaszy jest powierzchnią ekwipotencjalną.

-- Czy można wytworzyć pole elektrostatyczne, w którym wektory natężenia pola elektrycznego miały by ten sam kierunek i zwrot, a w kierunku do nich prostopadłym wartość natężenia zmieniała by się liniowo?