Pole elektryczne

Zjawiska elektryczne często opisujemy za pomocą pojęcia *pola elektrycznego* wytwarzanego przez ładunek w otaczającej go przestrzeni.

Załóżmy pewien rozkład nieruchomych ładunków $q_1, \ldots, q_n$ w przestrzeni i policzmy siłę, jaką wywierają one na umieszczony w punkcie (x, y, z) ładunek q_0:

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{J=1}^{n} \frac{q_0 q_j}{r_{0j}^2} \hat{r}_{0j}$$

gdzie wektror r_{0j} łączy j-ty ładunek z punktem (x, y, z). Siła ta jest proporcjonalna do ładunku q_0, jeżeli go opuścimy otrzymamy wielkość zależną jedynie od struktury początkowego układu ładunków:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{J=1}^{n} \frac{q_j}{r_{0j}^2} \hat{r}_{0j}$$

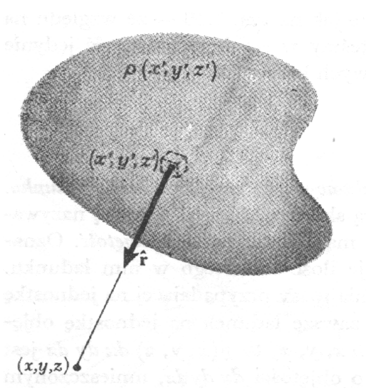
Doszliśmy e ten sposób do definicji ***natężenia pola elektrycznego***, wektorowej wielkości opisującej pole elektryczne wytworzone przez układ ładunków.

Dla natężenia pola elektrycznego możemy stosować zasadę superpozycji - dokładnie tak samo jak dla sił Culomba.

Często podaje się definicję natężenia pola elektrycznego jako siłę działającą na umieszczony w polu elektrycznym jednostkowy ładunek próbny. Takie postępowanie rodzi niebezpieczeństwo, że ładunek próbny może modyfikować pole, co w niektórych sytuacjach wymaga dyskusji...

Zadając pole elektryczne w przestrzeni przyporządkowujemy **każdemu** punktowi odpowiedni wektor natężenia. Jeżeli znamy pole w jakimś obszarze, to nie odwołując się do niczego więcej, możemy wnioskować jak się będą zachowywały dowolne ładunki w tym obszarze.

Przy polach pochodzących od **rozciągłych ładunków** sumowanie należy zastąpić całką, na przykład przy rozkładzie objętościowym:



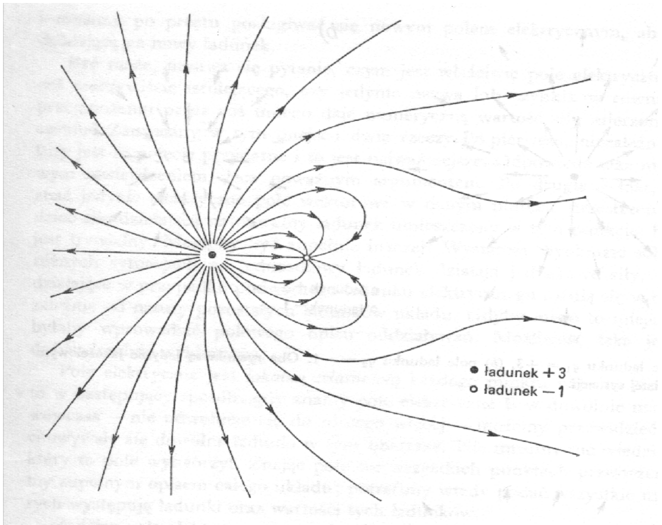
$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x', y', z')\hat{r}}{r_2}\,dx'\,dy'\,dz'$$

gdzie

$$\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'$$

jest ładunkiem zawartym w małym prostopadłościanie *dx'dy'dz'* znajdującym się w punkcie (x', y', z').

W miarę zbliżania się do ładunku punktowego natężenia pola elektrycznego dąży do nieskończonaści jak $1/r^2$. Pojęcie pola w miejscu występowania ładunku punktowego traci więc sens, ale taka osobliwość nie występuje w sytuacji pokazanego powyżej ładunku rozciągłego.

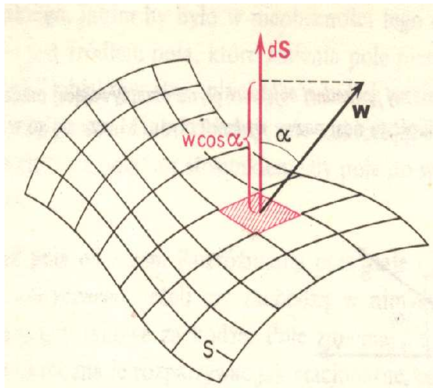


Często spotykanym przedstawieniem graficznym pola elektrycznego są tak zwane linie sił pola, czyli krzywe styczne w każdym punkcie do wektora natężenia pola elektrycznego. Linie sił zagęszczają się tam, gdzie pole elektryczne jest silniejsze.

Strumień pola elektrycznego

Natężenie pola elektrycznego niektórych rozkładów ładunku da się znaleźć w wyjątkowo prosty sposób, ale musimy w tym celu wprowadzić pojęcie ***strumienia pola elektrycznego***:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\, d\vec{S}$$



Jednostką strumienia pola jest:

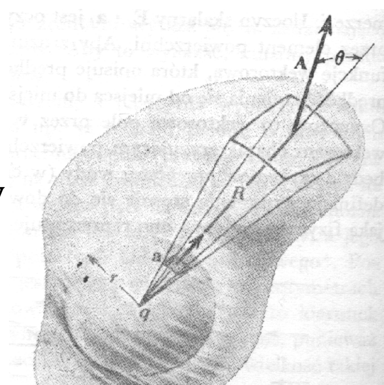
$$[\Phi] = \frac{N * m^2}{C}$$

Wektor elementu powierzchni jest zdefiniowany jako wektor o wartości równej powierzchni elementu, a o kierunku normalnej (zewnętrznej) do powierzchni.

Spróbujemy teraz policzyć wyrażenie na strumień pola elektrycznego przechodzący przez zamkniętą powierzchnię. Na początek policzmy strumień od ładunku *q* zawartego w środku powierzchni kulistej:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_S \frac{q\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi r^2}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Wynik możemy uogólnić dla dowolnej powierzchni. Rozważmy kontur o dowolnym kształcie otaczający kulę. Przeprowadźmy stożek o wierzchołku w q, wycinający z kuli element o powierzchni *a*, a z konturu element *A*. Porównajmy strumienie przez te dwa elementy:



$$\Phi_A = \vec{E}_R \vec{A} = E_R A\cos(\theta) = [E_r(\frac{r}{R})^2][a(\frac{R}{r})^2\frac{1}{\cos(\theta)}]\cos(\theta) = E_r a = \Phi_a$$

Udowodniliśmy, że strumienie przez oba elementy są sobie równe. Ponieważ każdemu elementowi powierzchni zewnętrznej możemy przypisać element sfery, zatem całkowity strumień jest jednakowy dla obu powierzchni.

W podobny sposób można wykazać, że strumień przez zamkniętą powierzchnię pochodzący od ładunku poza tą powierzchnią zanika.

Zastosujmy teraz zasadę superpozycji: natężenie pola elektrycznego od wielu źródeł można przedstawić jako sumę natężeń pola od pojedynczych źródeł:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}_1 + \ldots + \vec{E}_n)\,d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \ldots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób ***prawo Gaussa***:
Strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy całkowitemu ładunkowi zawartemu w tej powierzchni podzielonemu przez ε_0:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Prawo Gaussa wyprowadziliśmy korzystając z prawa Culomba - oba prawa są w zasadzie równoważne (w rzeczywistości prawo Gaussa okazuje się ogólniejsze).

Prawo Gaussa umożliwia nam rozwiązanie wielu - na pozór bardzo skomplikowanych - problemów.

Policzyczmy...

-- Prawo Gaussa umożliwia łatwe policzenie natężenia pola elektrycznego w sytuacjach, gdy potrafimy wykorzystać symetrię ładunku. Policzmy na przykład natężenie pola elektrycznego we wnętrzu oraz w sąsiedztwie:

--- jednorodnego ładunku kulistego;

--- jednorodnego ładunku w kształcie walca;

--- nieskończenie rozciągłej cienkiej płyty naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową (tutaj trudno mówić o wnętrzu...)

Do przemyśenia w długie zimowe wieczory:

-- Czasem spotyka się twierdzenie, że linie sił pola elektrostatycznego to linie, po których będzie się poruszał swobodny ładunek próbny umieszczony w tym polu. Czy to prawda?

-- Czy możliwa jest taka konfiguracja pola elektrycznego, w którym istniałby punkt zapewniający ładunkowi stan równowagi trwałej?