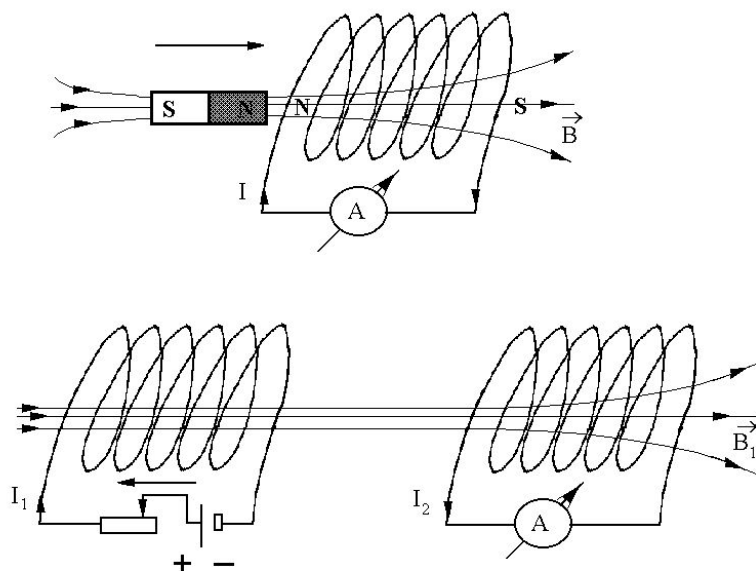


Rozdział 6

Indukcja elektromagnetyczna

6.1 Zjawisko indukcji elektromagnetycznej

W rozdziale tym rozpatrzemy niektóre zagadnienia, związane ze zmiennymi w czasie polami elektrycznymi i magnetycznymi oraz zmiennymi prądami elektrycznymi. Oersted wykazał doświadczalnie, że wokół przewodnika, przez który płynie prąd elektryczny, istnieje pole magnetyczne. Po odkryciu Oersteda uczeni wielokrotnie podejmowali próby wytworzenia prądu w przewodniku, umieszczonym w polu magnetycznym trwałego magnesu lub innego przewodnika z prądem. W 1831 r. M. Faraday stwierdził, że *zmiennie w czasie* pole magnetyczne istotnie powoduje przepływ prądu elektrycznego.



Rysunek 6.1:

go w przewodniku. Zjawisko to nazywa się *indukcją elektromagnetyczną* a powstający wówczas prąd — prądem indukowanym. Dwa z doświadczeń Faraday'a pokazuje rysunek 6.1.

Faraday ustalił doświadczalnie, że siła elektromotoryczna \mathcal{E} , powstająca w obwodzie, jest proporcjonalna do szybkości zmian w czasie strumienia indukcji pola magnetycznego Φ_B , obejmowanego przez obwód. W układzie jednostek MKSA prawo indukcji Faraday'a ma postać:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (6.1)$$

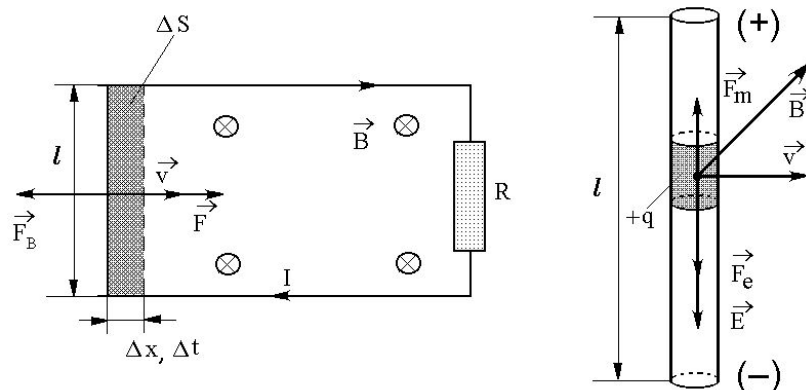
Znak „-” w tym wzorze związany jest z kierunkiem siły elektromotorycznej \mathcal{E} , jak będzie wyjaśnione dalej.

Przytoczymy teraz dwa wyprowadzenia prawa indukcji Faraday'a dla szczególnego przypadku obwodu z ruchomym prostoliniowym odcinkiem o długości l poruszającym się z prędkością \mathbf{v} (rys. 6.2). Zakładamy, że obwód ten znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} , skierowanym prostopadle do płaszczyzny obwodu i do wektora prędkości \mathbf{v} jego ruchomego odcinka.

Obliczymy najpierw siłę elektromotoryczną \mathcal{E} , indukowaną w prostoliniowym odcinku obwodu przy założeniu, że odcinek ten nie jest połączony z pozostałą częścią obwodu. Na ładunek q , znajdujący się w niewielkiej części tego przewodnika, działa ze strony pola magnetycznego siła \mathbf{F}_m o wartości liczbowej:

$$F_m = qvB \quad (6.2)$$

(por. wzór (4.1), podrozdział 4.1). Pod działaniem tej siły nośniki ładunku przemieszczają się wzdłuż przewodnika, w wyniku czego wewnątrz niego powstaje pole elektrostatyczne o natężeniu \mathbf{E} . Siła \mathbf{F}_e , jaką na ładunek q



Rysunek 6.2:

działa pole elektryczne, ma wartość:

$$F_e = qE. \quad (6.3)$$

Ruch nośników ładunku w przewodniku będzie zachodził do momentu, gdy obie siły zrównoważą się:

$$F_e = F_m, \quad (6.4)$$

co daje związek:

$$E = vB. \quad (6.5)$$

Przy założeniu, że pole elektryczne wewnątrz przewodnika jest jednorodne, indukowaną w nim siłę elektromotoryczną \mathcal{E} , równą co do wartości bezwzględnej różnicy potencjałów między końcami przewodnika, określa wzór:

$$\mathcal{E} = El, \quad (6.6)$$

czyli:

$$\boxed{\mathcal{E} = vBl}. \quad (6.7)$$

Jeżeli rozpatrywany odcinek przewodnika jest połączony z pozostałym fragmentem obwodu, indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna nie zmieni się i w obwodzie tym będzie płynął prąd elektryczny. W tym przypadku wyrażenie po prawej stronie ostatniego wzoru można przekształcić jak następuje:

$$Blv = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = - \frac{B\Delta S}{\Delta t} = - \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \quad (6.8)$$

(Δx — przemieszczenie ruchomego odcinka, ΔS — zmiana powierzchni obwodu, $\Delta\Phi_B$ — zmiana strumienia indukcji pola magnetycznego w czasie Δt). Z dwóch ostatnich wzorów otrzymujemy więc prawo indukcji Faraday'a:

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}, \quad (6.9)$$

wyrażone przez skończone przyrosty strumienia pola magnetycznego i czasu.

Niemiecki fizyk H. Helmholtz zauważył, że prawo indukcji Faraday'a można wyprowadzić z zasady zachowania energii. Podamy takie wyprowadzenie w przypadku rozważanego poprzednio obwodu. Na ruchomy odcinek obwodu działa ze strony pola magnetycznego siła F_B (rys. 6.2), której wartość wynosi:

$$F_B = IlB \quad (6.10)$$

(por. wzór (4.35) z podrozdziału 4.3). Przy założeniu, że ruch odcinka przewodnika jest jednostajny, siła ta musi być zrównoważona przez zewnętrzną siłę F :

$$F = F_B. \quad (6.11)$$

Siła ta, przy przesuwaniu ruchomego odcinka obwodu, dostarcza do obwodu moc:

$$P = Fv = F_B v = IlBv. \quad (6.12)$$

Występujący w tym wzorze czynnik lBv jest równy, zgodnie ze wzorem (6.8), szybkości zmian strumienia indukcji pola magnetycznego. Wobec tego moc:

$$P = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} I. \quad (6.13)$$

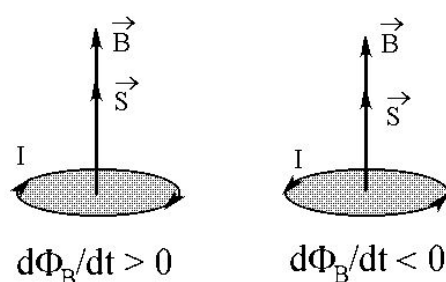
Zgodnie z zasadą zachowania energii, identyczna moc musi być rozpraszana na oporze R w rozpatrywanym obwodzie. Ponieważ moc wydzieloną w obwodzie można wyrazić wzorem (3.36) z podrozdziału 3.2, (zastępując w nim napięcie U przez siłę elektromotoryczną \mathcal{E}), więc:

$$P = \mathcal{E}I. \quad (6.14)$$

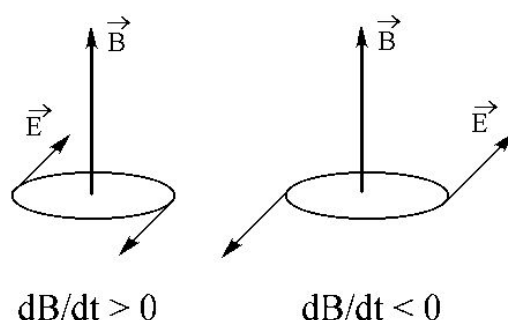
Porównując ostatnie dwa wzory, otrzymujemy znowu prawo indukcji Faraday'a (6.9).

Przytoczony przykład wskazuje, że w przypadku, gdy zamknięty obwód lub jego odcinek porusza się w polu magnetycznym, indukowanie się w nim prądu można wyjaśnić oddziaływaniem pola magnetycznego na ładunki w przewodnikach, tworzących ten obwód. Wyjaśnienie to nie jest jednak uniwersalne. Nie można go zastosować do przypadku zjawiska indukcji elektromagnetycznej w *nieruchomych* obwodach zamkniętych, znajdujących się w *zmiennym* polu magnetycznym (por. rys. 6.1). Istotnie, pole magnetyczne nie oddziałuje na nieruchome ładunki i nie może wprawiać ich w ruch. W celu zinterpretowania zjawiska indukcji elektromagnetycznej w nieruchomych obwodach należy przyjąć, że zmienne w czasie pole magnetyczne wywołuje powstanie wirowego pola elektrycznego, które powoduje przepływ prądu elektrycznego w zamkniętym obwodzie. Wspomniane pole elektryczne istnieje w przestrzeni zawsze, zamknięty obwód pozwala jedynie stwierdzić jego obecność (rys. 6.3 - 6.4).

Różnice w interpretacji zjawiska indukcji elektromagnetycznej w poruszających się i nieruchomych względem pola magnetycznego obwodach są wynikiem zależności natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego od wyboru układu odniesienia. W szczególnej teorii względności dowodzi się, że pole elektryczne i pole magnetyczne są ze sobą ściśle związane, tworząc jedno *pole elektromagnetyczne*. W określonych układach odniesienia pole to może przejawiać się jako pole wyłącznie elektryczne lub pole



Rysunek 6.3:



Rysunek 6.4:

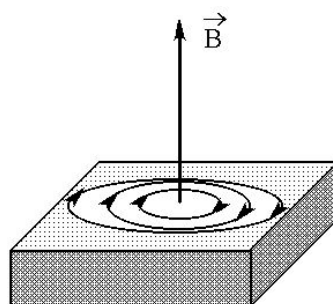
wyłącznie magnetyczne. Z tego powodu rozdzielenie pola elektromagnetycznego na pole elektryczne i pole magnetyczne ma względny charakter, zależny od wyboru układu odniesienia.

Wyjaśnimy obecnie sens znaku „-” w prawie indukcji Faraday’a. Dla przypadku indukcji elektromagnetycznej pokazanego na rys. 6.3, w celu obliczenia strumienia pola magnetycznego Φ_B , należy ustalić kierunek wektora \mathbf{S} , prostopadłego do płaszczyzny obwodu. Przyjmujemy tutaj dla uproszczenia, że obwód leży w jednej płaszczyźnie a pole magnetyczne jest jednorodne. Wówczas strumień pola magnetycznego obejmowany przez obwód wyraża się wzorem:

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (6.15)$$

i będzie dodatni, gdy wektory \mathbf{B} i \mathbf{S} tworzą kąt ostry a ujemny w przeciwnym przypadku. Siłę elektromagnetyczną \mathcal{E} , indukowaną w obwodzie uważamy za dodatnią, jeżeli wywołuje ona przepływ prądu w kierunku, związanym z kierunkiem wektora \mathbf{S} regułą śruby prawoskrętnej i za ujemną w przeciwnym przypadku. Z rysunku 6.3 widać, że zarówno w przypadku, gdy $d\Phi_B/dt > 0$ jak i gdy $d\Phi_B/dt < 0$ w prawie indukcji Faraday’a (6.1) powinien występować znak „-”.

Kierunek prądu indukowanego w obwodzie można w ogólnym przypadku ustalić na podstawie *reguły Lenza* (E.H. Lenz 1834 r.). Zgodnie z nią



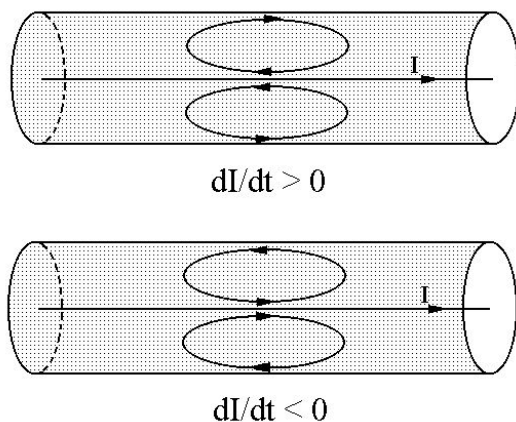
Rysunek 6.5:

prąd indukowany w obwodzie ma zawsze taki kierunek, że wytworzony przez niego strumień magnetyczny przez powierzchnię obejmowaną przez ten obwód przeciwdziała zmianom strumienia magnetycznego, które wywołują pojawienie się indukowanego prądu. Rozpatrzmy dla przykładu indukowanie się prądu w obwodzie przy zbliżaniu lub oddalaniu od niego trwałego magnesu (rysunek 6.1). Przy zbliżaniu magnesu prąd indukowany w obwodzie ma taki kierunek, że wytworzone przez niego pole magnetyczne odpycha magnes, a przy oddalaniu magnesu pole magnetyczne obwodu przyciąga magnes. Praca, wykonana przy zbliżaniu lub oddalaniu magnesu, jest zamieniana na rozproszoną w obwodzie energię cieplną. Przeciwny, niż to określa reguła Lenza, kierunek przepływu indukowanego prądu byłby więc sprzeczny z zasadą zachowania energii.

Prądy indukcyjne powstają nie tylko w obwodach złożonych z przewodników o małym przekroju poprzecznym ale również w przewodnikach masywnych, w formie płyt lub brył. Ponieważ linie przepływu indukowanego prądu mają wówczas kształt wiru, prądy te nazywa się prądami wirowymi lub prądami Foucault (rys. 6.5).

Zjawisko prądów wirowych w przewodnikach można zademonstrować na wiele sposobów. Drgania masywnego wahadła przewodzącego, umieszczonego między biegunami silnego magnesu, są tłumione w wyniku oddziaływania pola magnetycznego indukowanego prądu z polem magnesu. Podobnie, wahania igły magnetycznej, pod którą znajduje się płytka przewodząca, stosunkowo szybko zanikają. Natomiast przy obrocie płytki igła magnetyczna zaczyna się obracać w tym samym kierunku. Dwa ostatnie zjawiska zaobserwował po raz pierwszy francuski fizyk D. Arago w latach 1824-25, a więc jeszcze przed odkryciem zjawiska indukcji elektromagnetycznej. Prądy wirowe wywołują silne nagrzewanie się przewodników, co powoduje znaczne straty energii w elementach maszyn elektrycznych, np. metalowych rdzeniach uzwojeń z prądami zmiennymi. W celu ograniczenia tych strat energii, rdzenie wykonuje się z cienkich blach, oddzielonych od siebie warstwami izolacji.

Przeływ prądu zmiennego przez przewodnik wywołuje, na skutek indu-



Rysunek 6.6:

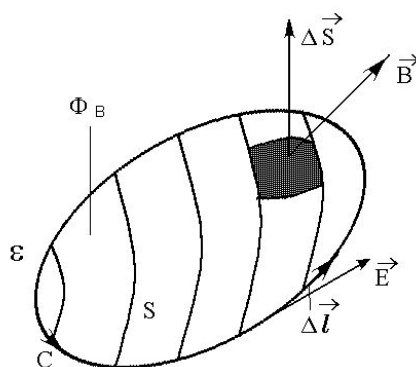
kowania się w nim prądów wirowych, tzw. zjawisko naskórkowości. Kierunek prądów wirowych przy przepływie prądu zmiennego w cylindrycznym przewodniku pokazuje rysunek 6.6. W obu przypadkach prądy te skierowane są w ten sposób, że przeciwdziałają zmianie wywołującego je prądu o natężeniu I w pobliżu osi przewodnika, a współdziałają z jego zmianą w pobliżu powierzchni przewodnika. Opór wewnętrznej części przewodnika jest więc dla prądu zmiennego znacznie większy niż części zewnętrznej. W związku z tym gęstość prądu nie jest jednakowa w całym przekroju przewodnika: najmniejsza jest na jego osi a największa na powierzchni. Prądy zmienne dużej częstotliwości płyną więc jedynie w cienkiej powierzchniowej warstwie przewodnika. Do takich prądów stosuje się często przewodniki w kształcie cienkościennych rurek.

Jak wspomniano poprzednio, zmienne pole magnetyczne wywołuje powstanie w zamkniętym obwodzie wirowego pola elektrycznego. Zapiszemy teraz prawo Faraday'a w postaci, uwidaczniającej związek między cyrkulacją z natężenia \mathbf{E} tego pola elektrycznego po konturze C , reprezentującym obwód z prądem i zmianą w czasie strumienia pola magnetycznego \mathbf{B} przez dowolną powierzchnię S , rozpiętą na tym konturze (rys. 6.7). Siłę elektromotoryczną indukcji można wyrazić jako cyrkulację z natężenia pola elektrycznego wewnątrz przewodnika po całym obwodzie:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.16)$$

(zgodnie z prawem Ohma dla obwodu zamkniętego suma spadków potencjału wzdłuż całego obwodu musi być równa działającej w tym obwodzie sile elektromotorycznej). Natomiast całkowity strumień Φ_B pola magnetycznego przez powierzchnię S wynosi:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.17)$$



Rysunek 6.7:

Prawo indukcji elektromagnetycznej (6.1) można zapisać więc jako:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (6.18)$$

Wzór ten jest również słuszny w przypadku wirowego pola elektrycznego w nieprzewodzącym ośrodku materialnym lub w próżni, wytworzonego przez zmienne w czasie pole magnetyczne. Krzywa C reprezentuje wtedy dowolny kontur a powierzchnia S — dowolną powierzchnię rozpiętą na tym konturze. Należy zauważyć, że w przypadku niezależnych od czasu pól — elektrycznego i magnetycznego, prawa strona ostatniego wzoru jest równa zero i cyrkulacja pola elektrycznego również znika. Rezultat ten jest zgodny z uzyskanym w elektrostatyce: niezależne od czasu pole elektryczne jest polem potencjalnym (bezwirowym).

Zapiszemy teraz ostatni wzór w postaci różniczkowej. Będziemy zakładać, że kształt konturu C i powierzchni S nie zmieniają się z czasem. Korzystając z twierdzenia Stokesa (podrozdział 1.10, wzór (1.166)), lewą stronę wzoru można zapisać jako:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (6.19)$$

Ponieważ, zgodnie z przyjętym założeniem, przyczyną zmian strumienia pola magnetycznego są jedynie zmiany indukcji pola magnetycznego \mathbf{B} , prawą stronę wzoru (6.18) można zapisać jak następuje:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} . \quad (6.20)$$

Posługiwanie się pochodną cząstkową względem czasu jest konieczne, ponieważ indukcja pola magnetycznego \mathbf{B} zależy w ogólnym przypadku również od zmiennych przestrzennych, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Wzór (6.18) przyjmuje wtedy

postać:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6.21)$$

Ponieważ wzór ten jest słuszny dla dowolnej powierzchni S , zachodzi zależność:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}, \quad (6.22)$$

przedstawiająca prawo indukcji Faraday'a w różniczkowej postaci. Zgodnie z nim, rotacja natężenia pola elektrycznego w danym punkcie jest równa szybkości zmian indukcji pola magnetycznego w tym punkcie, wziętej ze znakiem minus. Zauważyć można, że w przypadku pól niezależnych od czasu rotacja pola elektrycznego zawsze znika.

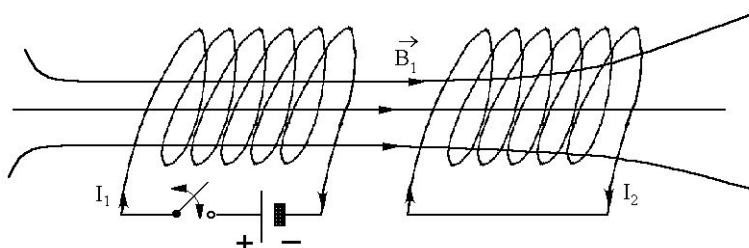
6.2 Zjawiska indukcji wzajemnej i samoindukcji

Jedno z doświadczeń Faraday'a dotyczyło sytuacji, gdy pole magnetyczne, wytworzone przez przepływ prądu o zmiennym natężeniu w pierwszym obwodzie, indukowało przepływ prądu w drugim obwodzie, umieszczonym w pobliżu pierwszego (rys. 6.8). Ponieważ indukcja \mathbf{B}_1 pola magnetycznego, wytworzonego przez pierwszy obwód w danym punkcie przestrzeni jest zawsze proporcjonalna do natężenia I_1 prądu płynącego w tym obwodzie (jak wynika np. z prawa Biot-Savarta-Laplace'a),

$$B_1 \sim I_1, \quad (6.23)$$

więc i strumień pola magnetycznego $\Phi_{B_{21}}$ przechodzący przez drugi obwód będzie (przy ustalonych rozmiarach, kształcie i wzajemnym położeniu obwodów) proporcjonalny do natężenia prądu w pierwszym obwodzie:

$$\Phi_{B_{21}} \sim I_1. \quad (6.24)$$



Rysunek 6.8:

Zachodzi więc zależność:

$$\boxed{\Phi_{B21} = M_{21}I_1}, \quad (6.25)$$

gdzie współczynnik M_{21} nazywamy *indukcyjnością wzajemną* obwodu drugiego względem obwodu pierwszego. Zależy ona od rozmiaru i kształtu obu obwodów, ich wzajemnego położenia a także od względnej przenikalności magnetycznej μ ośrodka otaczającego obwody. Jednostką indukcyjności wzajemnej jest henr (H):

$$[M] = \text{H} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}. \quad (6.26)$$

Siłę elektromotoryczną \mathcal{E}_2 , indukowaną w drugim obwodzie, można zgodnie z prawem indukcji Faraday'a wyrazić wzorem:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{B21}}{dt}, \quad (6.27)$$

czyli, uwzględniając poprzedni wzór:

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}}. \quad (6.28)$$

Siła elektromotoryczna, powstająca w drugim obwodzie, jest więc proporcjonalna do szybkości zmian natężenia prądu w pierwszym obwodzie.

Można rozpatrzyć odwrotną sytuację, gdy prąd o zmiennym natężeniu I_2 w drugim obwodzie będzie wytwarzać, na skutek zjawiska indukcji elektromagnetycznej, siłę elektromotoryczną \mathcal{E}_1 w pierwszym obwodzie. Indukcyjność wzajemną M_{12} pierwszego obwodu względem drugiego określa wzór:

$$\Phi_{B12} = M_{12}I_2, \quad (6.29)$$

gdzie Φ_{B12} — strumień pola magnetycznego, obejmowany przez pierwszy obwód. Siła elektromotoryczna \mathcal{E}_1 w tym obwodzie wyraża się wzorem:

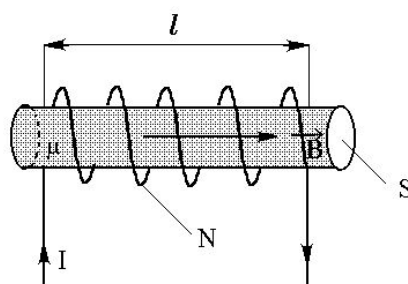
$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (6.30)$$

Można udowodnić, że obie indukcyjności wzajemne są sobie równe. Oznaczając je przez M można więc napisać:

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (6.31)$$

i nie rozróżniać wielkości M_{12} i M_{21} w poprzednich wzorach.

Jeżeli w pojedynczym obwodzie płynie prąd elektryczny o zmiennym natężeniu I , indukuje on w tym obwodzie „własną” siłę elektromotoryczną \mathcal{E} . Ze zmianą natężenia prądu zmienia się bowiem wytworzone pole magnetyczne \mathbf{B} oraz strumień Φ_B tego pola, obejmowany przez obwód (rys. 6.9).



Rysunek 6.9:

Podobnie jak poprzednio można stwierdzić, że strumień pola magnetycznego Φ_B jest wprost proporcjonalny do natężenia prądu I :

$$\boxed{\Phi_B = LI}. \quad (6.32)$$

Współczynnik L w tym wzorze nazywa się *indukcyjnością własną* obwodu. Zależy ona od rozmiarów i kształtu obwodu oraz od przenikalności magnetycznej μ ośrodka. Jednostką indukcyjności własnej, tak jak indukcyjności wzajemnej, jest henr:

$$[L] = \text{H}. \quad (6.33)$$

Jak wynika z prawa Faraday'a, indukowana siła elektromotoryczna, zwana *siłą elektromotoryczną samoindukcji*, wyraża się wzorem:

$$\boxed{\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}}. \quad (6.34)$$

Znak minus w tym wzorze związany jest z faktem, że indukowany prąd przeciwdziała, zgodnie z regułą Lenza, zmianom natężenia prądu w obwodzie. Jeżeli natężenie prądu wzrasta, $dI/dt > 0$, prąd indukowany w obwodzie ma kierunek przeciwny do kierunku prądu I a gdy natężenie prądu maleje, $dI/dt < 0$, kierunek indukowanego prądu jest zgodny z kierunkiem prądu I . Szczególnie duża siła elektromotoryczna samoindukcji powstaje przy szybkim otwieraniu obwodu elektrycznego. Powoduje to często przeskoki iskry elektrycznej między stykami wyłącznika.

Obliczmy teraz indukcyjność własną długiego solenoidu o liczbie zwojów N , długości l i powierzchni przekroju poprzecznego S , wypełnionego materiałem o względnej przenikalności magnetycznej μ (rys. 6.9). Załóżmy, że przez solenoid płynie prąd o natężeniu I . Zgodnie ze wzorem (4.86) z podrozdziału 4.5, indukcja pola magnetycznego wewnątrz solenoidu wyraża się wzorem:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I N}{l}. \quad (6.35)$$

Całkowity strumień Φ_B pola magnetycznego przez powierzchnię wszystkich zwojów solenoidu wynosi:

$$\Phi_B = NBS, \quad (6.36)$$

czyli, po uwzględnieniu poprzedniego wzoru:

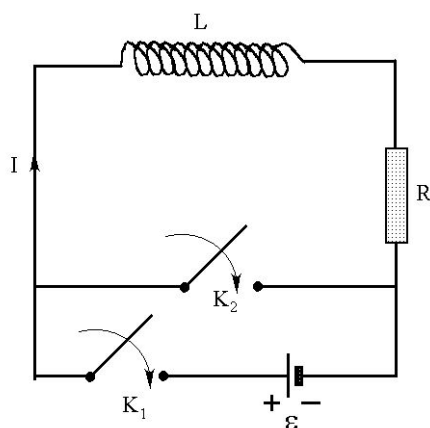
$$\Phi_B = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} I. \quad (6.37)$$

Porównując ten wzór ze wzorem (6.32) otrzymujemy następujące wyrażenie dla indukcyjności długiego solenoidu:

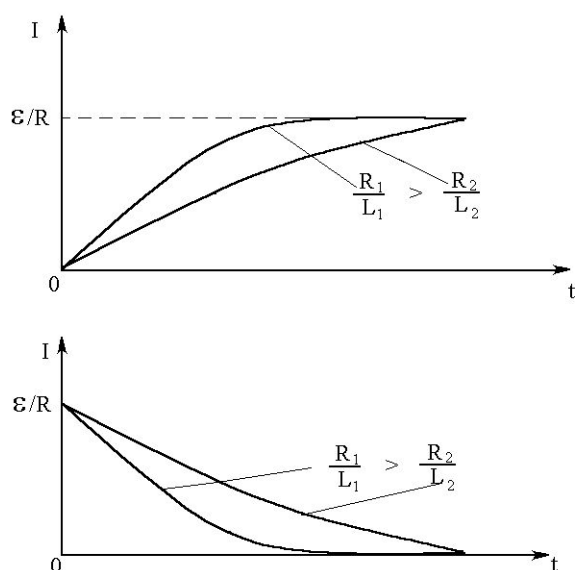
$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}}. \quad (6.38)$$

6.3 Gęstość energii pola magnetycznego

Rozpatrzmy obecnie zmiany natężenia prądu, płynącego w obwodzie złożonym z opornika o oporze R i solenoidu o indukcyjności L , połączonych ze źródłem siły elektromotorycznej (tzw. obwód LR , rys. 6.10). Po zamknięciu wyłącznika K_1 (przy otwartym wyłączniku K_2) w obwodzie popłynie prąd o natężeniu I , rosnącym stopniowo od wartości zerowej do wartości \mathcal{E}/R (rysunek 6.11). Ten stopniowy wzrost prądu spowodowany jest indukowaniem się w solenoidzie siły elektromotorycznej samoindukcji \mathcal{E}_s skierowanej, zgodnie z regułą Lenza, przeciwie do siły elektromotorycznej \mathcal{E} źródła prądu. Narastanie prądu zachodzi tym wolniej, im mniejszy jest stosunek R/L , tj. im większa jest indukcyjność obwodu i im mniejszy jego opór. Po otwarciu wyłącznika K_1 i jednoczesnym zamknięciu wyłącznika K_2 w obwodzie popłynie w tym samym kierunku prąd, którego natężenie stopniowo maleje od



Rysunek 6.10:



Rysunek 6.11:

wartości \mathcal{E}/R do zera (rysunek 6.11). W solenoidzie indukuje się wówczas siła elektromotoryczna \mathcal{E}_s , skierowana zgodnie z siłą elektromotoryczną \mathcal{E} źródła prądu. Zanik prądu następuje tym wolniej, im mniejszy jest stosunek R/L . Zjawisko to świadczy, że obwód o określonej indukcyjności, przez który płynie prąd elektryczny, posiada pewną energię, zgromadzoną w polu magnetycznym obwodu. Energia ta zamienia się następnie na energię cieplną, rozpraszaną w obwodzie.

Obliczmy teraz wartość energii pola magnetycznego elementu obwodu o indukcyjności L , przez który płynie prąd o natężeniu I . Zgodnie z prawem Ohma, dla obwodu o indukcyjności L i oporze R , po jego zamknięciu zachodzi zależność:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_s = IR, \quad (6.39)$$

gdzie \mathcal{E} jest siłą elektromotoryczną źródła prądu a \mathcal{E}_s siłą elektromotoryczną samoindukcji:

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6.40)$$

Z ostatnich dwóch wzorów otrzymujemy równanie:

$$\mathcal{E} = IR + L \frac{dI}{dt}. \quad (6.41)$$

Mnożąc obie strony tego równania przez czynnik $I dt$ dostajemy:

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + L I dI. \quad (6.42)$$

Lewa strona tego równania przedstawia energię, dostarczoną do obwodu przez źródło siły elektromotorycznej \mathcal{E} w czasie dt a pierwszy wyraz po prawej stronie — energię ciepłą, wydzieloną na oporze R w tym samym czasie. Wynika stąd, że drugi wyraz po prawej stronie przedstawia przyrost energii potencjalnej elementu o indukcyjności L , przez który płynie prąd o natężeniu I , przy przyroście natężenia prądu o dI . Całkowaną energię potencjalną tego elementu określa więc wzór:

$$E_p = \int_0^I LI' dI' = L \int_0^I I' dI' = L \frac{I'^2}{2} \Big|_0^I, \quad (6.43)$$

czyli:

$$\boxed{E_p = \frac{LI^2}{2}}. \quad (6.44)$$

Można przypuszczać, jak stwierdzono już wcześniej, że podany wzór określa energię pola magnetycznego rozpatrywanego elementu obwodu o indukcyjności L , przez który przepływa prąd.

Podobnie, jak w przypadku energii pola elektrycznego (podrozdziały 1.14 i 2.2), należy oczekiwać, że energia pola magnetycznego jest rozłożona w przestrzeni z określoną gęstością objętościową. Zastosujemy teraz ostatni wzór do szczególnego przypadku energii długiego solenoidu, wewnątrz którego istnieje jednorodne pole magnetyczne. Korzystając ze wzoru (6.38), określającego indukcyjność solenoidu, otrzymujemy:

$$E_p = \frac{\mu_0 \mu N^2 S I^2}{2l}. \quad (6.45)$$

Wyrażenie to można przekształcić korzystając ze wzoru (6.35) na indukcję pola magnetycznego solenoidu, z którego wynika zależność:

$$NI = \frac{Bl}{\mu_0 \mu}. \quad (6.46)$$

Wówczas:

$$E_p = \frac{\mu_0 \mu S}{2l} \cdot \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 \mu^2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} Sl, \quad (6.47)$$

czyli, biorąc pod uwagę, że $V = Sl$ jest objętością solenoidu,

$$E_p = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V. \quad (6.48)$$

Widzimy, że energia potencjalna solenoidu z prądem jest proporcjonalna do jego objętości, w której indukcja pola magnetycznego $\mathbf{B} \neq 0$. Można

więc wnioskować, że energia pola magnetycznego solenoidu jest rozłożona wewnątrz niego z gęstością objętościową:

$$w_m = \frac{E_P}{V}, \quad (6.49)$$

której wartość wynosi:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}, \quad (6.50)$$

$$[w_m] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}. \quad (6.51)$$

Ponieważ indukcja \mathbf{B} i natężenie \mathbf{H} pola magnetycznego są ze sobą związane (w przypadku ośrodków nieferromagnetycznych lub próżni) zależnością:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (6.52)$$

ostatnie wyrażenie można przepisać w innych, równoważnych postaciach:

$$\boxed{w_m = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2}}. \quad (6.53)$$

Jeżeli pole magnetyczne w przestrzeni jest niejednorodne, całkowitą jego energię można obliczyć, całkując gęstość energii w_m po całej objętości w której istnieje pole magnetyczne.

W ogólnym przypadku, w danym obszarze przestrzeni może istnieć zarówno pole elektryczne jak i pole magnetyczne. Sytuacja taka ma m.in. miejsce w przypadku rozchodzenia się fali elektromagnetycznej (w ośrodku materialnym lub w próżni). Gęstość energii w_e pola elektrycznego określa wzór (podrozdział 2.2):

$$w_e = \frac{ED}{2}, \quad (6.54)$$

gdzie E jest wartością natężenia a D wartością indukcji pola elektrycznego. Całkowita gęstość energii w pola elektromagnetycznego będzie wówczas sumą gęstości energii pola elektrycznego i pola magnetycznego:

$$w = w_e + w_m, \quad (6.55)$$

$$[w] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}. \quad (6.56)$$

Zgodnie z podanymi powyżej wzorami, wyraża się ona wzorem:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}(ED + HB)}. \quad (6.57)$$

Wzór ten, podobnie jak wzory dla w_e i w_m można zapisać w innych, równoważnych postaciach.

6.4 Prąd zmienny

Zbadamy teraz zjawisko indukowania się siły elektromotorycznej w płaskim obwodzie o powierzchni S , umieszczonym w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} i obracającym się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi leżącej w płaszczyźnie obwodu (rys. 6.12). Będziemy zakładać, że oś obrotu jest prostopadła do wektora indukcji pola magnetycznego. Urządzenie takie stanowi najprostszą prądnice prądu zmiennego.

Strumień pola magnetycznego \mathbf{B} przez powierzchnię obwodu określa wzór:

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \alpha, \quad (6.58)$$

gdzie α jest kątem między wektorem \mathbf{B} indukcji pola magnetycznego i wektorem \mathbf{S} , prostopadłym do płaszczyzny obwodu. Ponieważ obwód obraca się ze stałą prędkością kątową ω , więc:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0, \quad (6.59)$$

gdzie α_0 jest kątem, jaki tworzą wektory \mathbf{B} i \mathbf{S} w chwili $t = 0$. Strumień pola magnetycznego Φ_B wyraża się zatem wzorem:

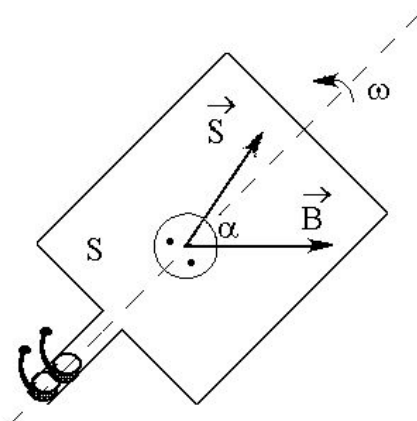
$$\Phi_B = BS \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (6.60)$$

Zgodnie z prawem indukcji Faraday'a, siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wynosi:

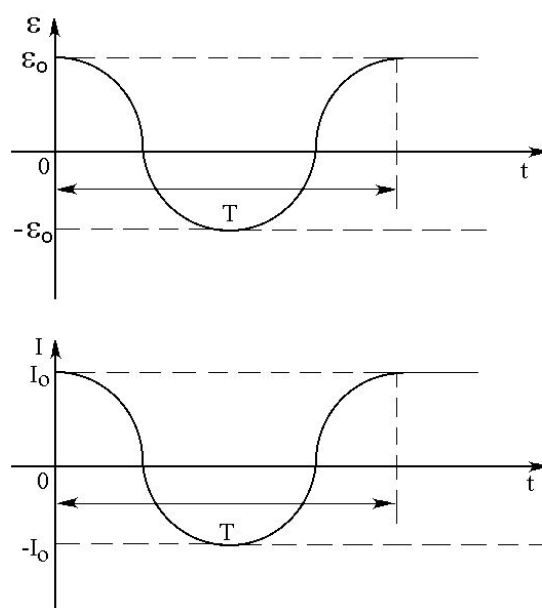
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} [BS \cos(\omega t + \alpha_0)] = BS\omega \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (6.61)$$

Wprowadzając oznaczenie $\mathcal{E}_0 = BS\omega$ ostatni wzór możemy zapisać jako:

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0)}. \quad (6.62)$$



Rysunek 6.12:



Rysunek 6.13:

Indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna \mathcal{E} zmienia się więc sinusoidalnie z czasem (rys. 6.13). Jeżeli obwód ten byłby połączony z zewnętrznym nieruchomym obwodem o znacznie większym oporze R , natężenie I indukowanego prądu, zgodnie z prawem Ohma, wynosiłoby:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (6.63)$$

Oznaczając maksymalne natężenie prądu przez $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ ostatni wzór można przepisać w postaci:

$$\boxed{I = I_0 \sin(\omega t + \alpha_0)}. \quad (6.64)$$

Natężenie indukowanego prądu zmienia się, podobnie jak siła elektromotoryczna \mathcal{E} , sinusoidalnie z czasem (rys. 6.13). Prąd taki nazywamy *prądem zmiennym*. Wielkość ω nazywa się pulsacją (częstotliwością kątową, częstotliwością kołową), kąt α_0 — fazą początkową, \mathcal{E}_0 — amplitudą siły elektromotorycznej, I_0 — amplitudą prądu zmiennego. Najkrótszy czas T w którym siła elektromotoryczna lub natężenie prądu osiągają swoje poprzednie wartości, nazywa się ich okresem (por. rysunek 6.13), a wielkość:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (6.65)$$

ich częstotliwością. Zachodzą przy tym zależności:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}. \quad (6.66)$$

Moc prądu zmiennego w danej chwili czasu wyraża się wzorem:

$$P = \mathcal{E}I = \mathcal{E}_0 I_0 \sin^2 \omega t \quad (6.67)$$

(przyjęto dla uproszczenia, że $\alpha_0 = 0$). Odpowiada ona ilości ciepła wydzielonego w obwodzie w jednostce czasu. Zgodnie z ostatnim wzorem moc prądu zmienia się z czasem proporcjonalnie do wartości funkcji $\sin^2 \omega t$. Średnia moc prądu zmiennego w ciągu jednego okresu jest dana wzorem:

$$P_{\acute{s}r} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt. \quad (6.68)$$

Korzystając z poprzednich wzorów otrzymujemy:

$$P_{\acute{s}r} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt. \quad (6.69)$$

Ostatnią całkę można obliczyć jak następuje:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt &= \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt \\ &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \Big|_0^T = \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Otrzymujemy więc wzór:

$$P_{\acute{s}r} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0. \quad (6.71)$$

Zwykle definiuje się wartość skuteczną siły elektromotorycznej i wartość skuteczną natężenia prądu wzorami:

$$\mathcal{E}_{sk} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \mathcal{E}_0, \quad (6.72)$$

$$I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_0. \quad (6.73)$$

Wzór (6.71) przyjmuje wtedy postać:

$$\boxed{P_{\acute{s}r} = \mathcal{E}_{sk} I_{sk}}. \quad (6.74)$$

Ogólnie napięciem (natężeniem) skutecznym prądu zmiennego nazywamy napięcie (natężenie) prądu stałego, który wydziela w obwodzie moc równą średniej mocy prądu zmiennego.