

Rozdział 4

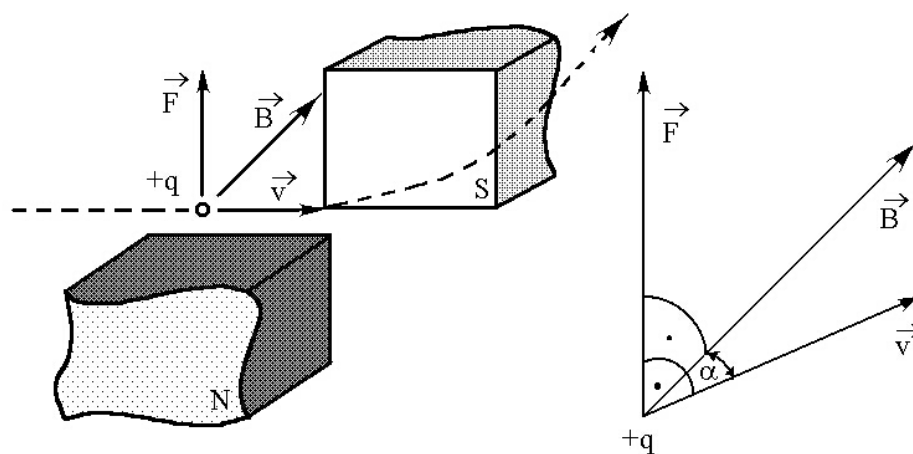
Magnetostatyka

4.1 Pole magnetyczne. Siła Lorentza. Wektor indukcji magnetycznej

Przez magnetostatykę rozumiemy tę część nauki o magnetyzmie, która dotyczy stałych, niezależnych od czasu pól magnetycznych. W tym rozdziale będziemy rozpatrywać wyłącznie pola magnetyczne w próżni. Źródłem pola magnetycznego są m.in. trwałe magnesy oraz przewodniki z prądem. Każdy magnes posiada dwa bieguny; bieguny jednoimienne magnesów odpychają się, a bieguny różnoimienne — przyciągają się. Magnes trwały można uważać za odpowiednik dipola elektrycznego. W szczególności na magnes umieszczony w polu magnetycznym działa zwykle określony moment siły. Magnes zawieszony swobodnie ustawia się w płaszczyźnie południka geograficznego, zjawisko to tłumaczy się istnieniem pola magnetycznego Ziemi. Biegun magnesu zwrócony na północ nazywamy północnym (N) a zwrócony na południe — południowym (S).

W 1785 r. Ch. Coulomb wykazał doświadczalnie, że siła oddziaływania biegunów długich magnesów jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi, podobnie jak w przypadku oddziaływania ładunków elektrycznych. Wykorzystując tę analogię można zdefiniować pojęcie „ładunku magnetycznego” i natężenia pola magnetycznego w identyczny sposób, jak w elektrostatyce. Analogia między zjawiskami magnetycznymi i elektrycznymi jest jednak niepełna — biegunów magnesu nie można rozdzielić. Należy zauważyć, że teoretycznie możliwe jest istnienie cząstek posiadających ładunek magnetyczny określonego znaku („północny” lub „południowy”), zwanych monopolami magnetycznymi. Zagadnienie to analizował teoretycznie fizyk angielski P.A.M. Dirac w 1931 r., wyprowadzając m.in. wzór określający ładunek magnetyczny monopoli. Tym niemniej, jak dotąd nie ma żadnego doświadczalnego dowodu na istnienie monopoli magnetycznych.

Przy definiowaniu wektora pola magnetycznego bardziej naturalne wydaje się wykorzystanie zjawiska oddziaływania pola magnetycznego na poru-



Rysunek 4.1:

szające się ładunki elektryczne. Zjawisko to zostało odkryte pod koniec XIX w. Siła F działająca na cząstkę w polu magnetycznym trwałego magnesu jest prostopadła do wektora v prędkości cząstki i zależy od jego kierunku względem biegunów magnesu (rys. 4.1). Można znaleźć taki kierunek wektora prędkości cząstki (na rysunku od jednego bieguna magnesu do drugiego), że na poruszający się ładunek nie działa żadna siła. Kierunek ten uważany za kierunek pola magnetycznego, przy czym siła działająca na cząstkę jest do niego prostopadła. Wartość siły przy ustalonym kierunku prędkości cząstki jest wprost proporcjonalna do jej ładunku q (przy zmianie znaku ładunku siła zmienia kierunek na przeciwny), do prędkości cząstki v oraz do sinusa kąta α między kierunkiem pola magnetycznego a kierunkiem wektora prędkości. Siłę działającą na poruszający się ładunek można więc wyrazić wzorem:

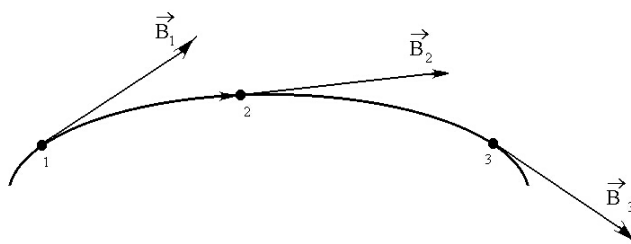
$$F = qvB \sin \alpha \quad (4.1)$$

albo w wektorowej postaci:

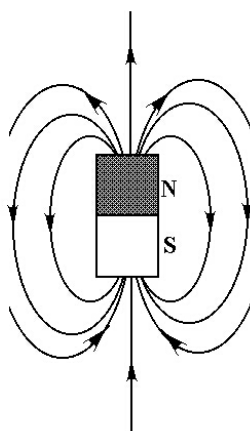
$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}. \quad (4.2)$$

Powyższe wzory stanowią w istocie definicję *wektora indukcji magnetycznej* \mathbf{B} . Ostatnie równanie pozwala określić zwrot wektora \mathbf{B} . Zgodnie z doświadczeniem, jest on skierowany od bieguna N do bieguna S magnesu. Jednostką indukcji magnetycznej nazywamy teslę (T):

$$[B] = \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}. \quad (4.3)$$



Rysunek 4.2:



Rysunek 4.3:

Jeżeli naładowana cząstka porusza się w obszarze, gdzie istnieje zarówno pole elektryczne jak i pole magnetyczne, to działa na nią wypadkowa siła:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.4)$$

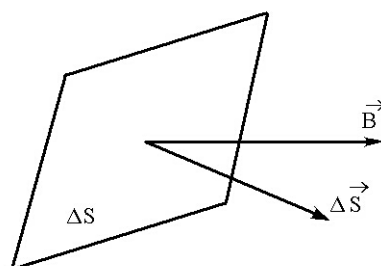
zwana *siłą Lorentza*.

Po określeniu wektora indukcji magnetycznej można wprowadzić inne wielkości, charakteryzujące pole magnetyczne. Przez linie sił pola magnetycznego rozumiemy linie, które w każdym punkcie przestrzeni mają kierunek styczny do wektora indukcji magnetycznej i zgodny z nim zwrot (rys. 4.2). Przebieg linii sił pola magnesu sztabkowego pokazuje schematycznie rysunek 4.3. Widać analogię z przebiegiem linii sił dipola elektrycznego. Strumień indukcji pola magnetycznego przez niewielką powierzchnię (rys. 4.4) określa wzór:

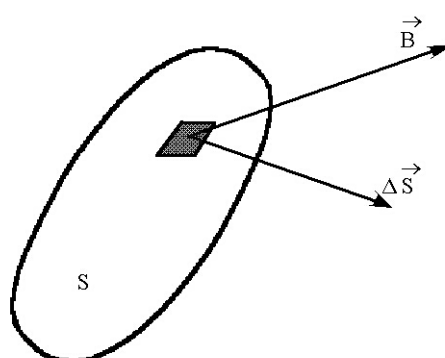
$$\Delta\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{S}. \quad (4.5)$$

Jednostką strumienia indukcji magnetycznej jest weber (Wb):

$$[\Phi_B] = \text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} = \text{V} \cdot \text{s}. \quad (4.6)$$



Rysunek 4.4:



Rysunek 4.5:

Strumień indukcji pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię S (rys. 4.5) jest równy:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (4.7)$$

Linie sił stałego pola magnetycznego są zawsze liniami zamkniętymi. W przypadku pola wytworzonego przez trwałe magnesy wynika to z faktu, że w przyrodzie nie występują monopole magnetyczne. Jak będzie później widoczne, również linie sił pola magnetycznego, wywołanego przez przepływ prądu stałego, zawsze zamykają się. Zatem strumień indukcji pola magnetycznego przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy zeru:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (4.8)$$

Jest to odpowiednik prawa Gaussa dla pola elektrycznego. Korzystając z twierdzenia Gaussa ostatni wzór można zapisać w postaci różniczkowej:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (4.9)$$

Dywergencja stałego pola magnetycznego jest więc w każdym punkcie przestrzeni równa zeru.

4.2 Ruch naładowanych cząstek w polu magnetycznym

Zjawiska ruchu naładowanych cząstek w polu magnetycznym wykorzystuje się w wielu przyrządach i urządzeniach jak oscyloskop, mikroskop elektronowy, spektrometr masowy i akceleratory cząstek. Poniżej omówimy zasadę działania niektórych z tych urządzeń.

Rozpatrzmy najpierw ruch cząstki o ładunku q w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} . Zbadamy jedynie szczególny przypadek, gdy cząstka porusza się prostopadle do linii sił pola (rys. 4.6). Siła \mathbf{F} działająca na cząstkę jest wówczas skierowana prostopadle do wektora prędkości cząstki \mathbf{v} i do wektora \mathbf{B} i ma liczbową wartość:

$$F = qvB. \quad (4.10)$$

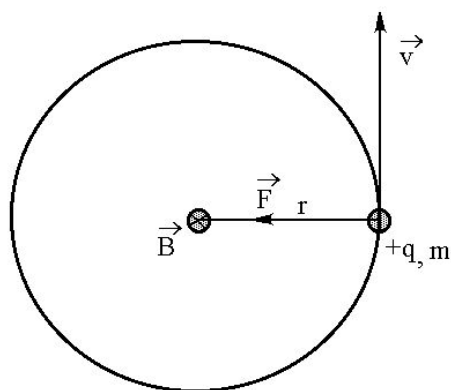
Ponieważ siła działająca na cząstkę w polu magnetycznym jest zawsze prostopadła do prędkości a więc i do toru cząstki, siła ta nie wykonuje żadnej pracy. Zatem energia kinetyczna i bezwzględna wartość prędkości cząstki w polu magnetycznym pozostają stałe. Siła \mathbf{F} pełni więc rolę siły dośrodkowej a jej wartość bezwzględna nie zmienia się. Wynika stąd, że w rozpatrywanym przypadku cząstka będzie poruszać się po okręgu o określonym promieniu r .

Siła dośrodkowa ma wartość liczbową:

$$F_d = \frac{mv^2}{r}, \quad (4.11)$$

gdzie m jest masą cząstki. Porównując obie siły, $F = F_d$, otrzymujemy wzór:

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \quad (4.12)$$



Rysunek 4.6:

z którego można obliczyć promień krzywizny toru cząstki:

$$\boxed{r = \frac{mv}{qB}}. \quad (4.13)$$

Okres T obiegu cząstki po okręgu określa wzór:

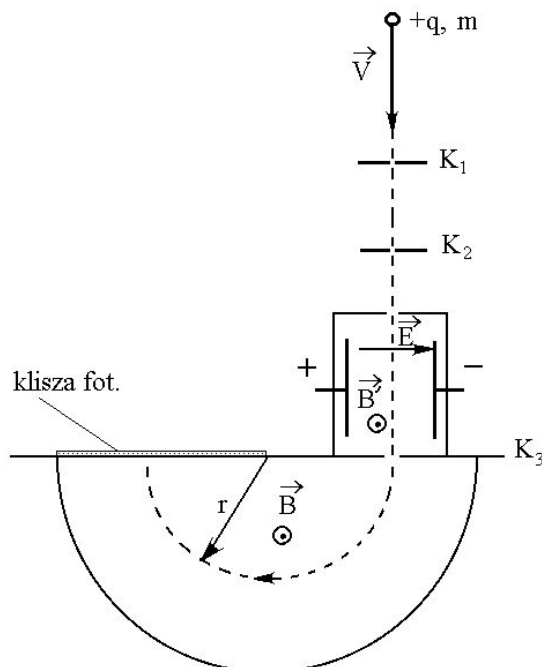
$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad (4.14)$$

z którego, po uwzględnieniu poprzedniego wzoru, otrzymuje się:

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{qB}}. \quad (4.15)$$

Jak widać, okres obiegu cząstki w polu magnetycznym nie zależy od promienia orbity ani od prędkości. Ostatnie stwierdzenie jest słuszne dla prędkości cząstki znacznie mniejszej od prędkości światła. W przeciwnym przypadku, przy prędkości cząstki porównywalnej z prędkością światła, relatywistyczny wzrost masy cząstki powoduje wydłużenie okresu jej obiegu ze wzrostem prędkości.

Spektrometry (spektrografy) masowe są przyrządami służącymi do rozdzielania wiązek cząstek (zwykle jonów) według wartości stosunku masy do



Rysunek 4.7:

ładunku. Są one stosowane m.in. do precyzyjnego pomiaru mas jonów i do analizy składu chemicznego różnych substancji. Schemat spektrometru masowego Bainbridge'a pokazuje rysunek 4.7.

Wiązka jonów, przechodząca przez kolimatory K_1 i K_2 wpada w obszar, w którym jest wytworzone pole elektryczne o natężeniu \mathbf{E} oraz prostopadle do niego pole magnetyczne o indukcji \mathbf{B}' . Po przejściu przez kolimator K_3 wiązka jonów wpada w obszar pola magnetycznego o indukcji \mathbf{B} . Skrzyżowane pola \mathbf{E} i \mathbf{B}' w pierwszym obszarze służą jako selektor prędkości jonów. Ponieważ siły oddziaływania pola elektrycznego i magnetycznego w tym obszarze wynoszą odpowiednio:

$$F = qE, \quad (4.16)$$

$$F' = qvB', \quad (4.17)$$

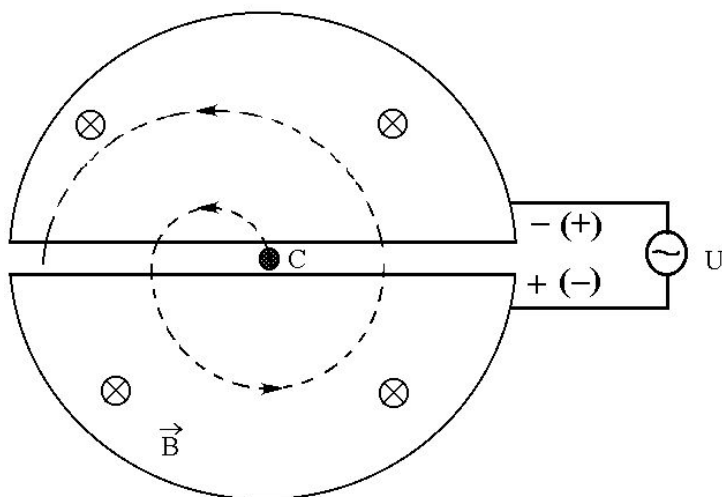
przez kolimator K_3 przejdą tylko jony, dla których $F = F'$, czyli:

$$qE = qvB', \quad (4.18)$$

tj. jony o prędkości:

$$v = \frac{E}{B'}. \quad (4.19)$$

W drugim obszarze jony poruszają się po łukach okręgów o promieniu krzywizny proporcjonalnym do wartości m/q (por. wzór (4.13)). W przypadku, gdy wiązka jonów składa się z kilku ich rodzajów o różnych wartościach stosunku m/q , na kliszy fotograficznej powstanie szereg równoległych prążków, odpowiadających poszczególnym jonom (tzw. „widmo mas”).



Rysunek 4.8:

Akceleratory cząstek naładowanych są stosowane w fizyce jądrowej do nadawania tym cząstkom wysokich energii kinetycznych, rzędu milionów lub miliardów elektronowoltów. Tak duże energie są niezbędne do wywołania szeregu reakcji jądrowych. Przykładem takiego akceleratora jest *cyklotron*, zbudowany po raz pierwszy przez E. Lawrence'a w 1930 r (rys. 4.8).

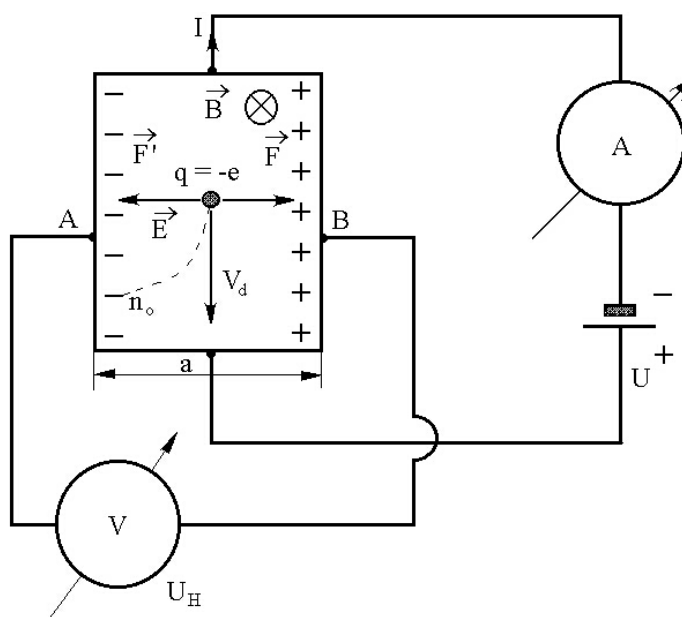
Zasadniczą część cyklotronu stanowią dwa duanty o kształcie połówek niskiej, cienkościennej puszki, umieszczone między biegunami silnego elektromagnesu, który wytwarza pole magnetyczne o indukcji \mathbf{B} . Do duantów przyłożone jest zmienne napięcie, wytwarzające w szczelinie między nimi zmienne pole elektryczne. Dodatni jon, znajdujący się początkowo w punkcie C jest przyspieszany przez pole elektryczne a następnie zakreśla wewnątrz duantu półokrąg o promieniu r danym wzorem (4.13). W wyniku powtarzania tego procesu jon uzyskuje znaczną energię kinetyczną (w przypadku protonów — rzędu MeV). Warunkiem przyspieszania jonów jest równość okresu T_0 zmian pola elektrycznego i okresu T obiegu jonu, określonego wzorem (4.15). Wartość maksymalnej energii cząstek, uzyskiwanej w cyklotronie, ogranicza głównie efekt wzrostu masy cząstek z ich prędkością, co narusza warunek synchronizmu obiegu, $T_0 = T$. Akceleratory w których wyeliminowano ten efekt przez odpowiednią zmianę okresu napięcia zasilającego i indukcji pola magnetycznego podczas przyspieszania cząstek noszą nazwę synchrofazotronów.

Oddziaływanie pola magnetycznego na naładowane, poruszające się cząstki wykorzystuje się w wielu doświadczeniach z zakresu fizyki ciała stałego, fizyki atomowej i fizyki jądrowej. Omówimy poniżej tzw. *zjawisko Halla*, obserwowane we wszystkich przewodnikach i półprzewodnikach. W 1879 r. fizyk amerykański E. Hall stwierdził, że przy przepływie prądu o natężeniu I przez prostopadłościenną płytkę, umieszczoną w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} , prostopadłym do kierunku przepływu prądu, między punktami A i B płytki powstaje różnica potencjałów $U_H = \varphi_A - \varphi_B$ (rys. 4.9).

Zjawisko Halla można wyjaśnić następująco. Na nośnik ładunku q , poruszający się w polu magnetycznym, działa siła:

$$\mathbf{F}' = qv_d\mathbf{B}, \quad (4.20)$$

gdzie v_d — prędkość dryfu nośnika. Pod działaniem tej siły nośniki ładunku są odpychane w kierunku lewej ścianki płytki, niezależnie od ich znaku (na rysunku przyjęto, że nośnikami ładunku są elektrony). W pobliżu lewej ścianki powstaje więc nadmiar ładunków q , a w pobliżu prawej ścianki niedomiar tych ładunków. Wskutek tego w płytce wytwarza się poprzeczne pole elektryczne o natężeniu \mathbf{E} , skierowane z prawa na lewo, gdy ładunki q są ujemne (jak na rysunku), a z lewa na prawo, gdy są one dodatnie. Siła \mathbf{F} , jaką na ładunek q działa poprzeczne pole elektryczne, jest skierowana przeciwnie do siły \mathbf{F}' oddziaływania pola magnetycznego. Po pewnym czasie



Rysunek 4.9:

obie siły zrównoważą się wzajemnie:

$$F = F'. \quad (4.21)$$

Ponieważ siła działająca na ładunek w polu elektrycznym:

$$F = qE, \quad (4.22)$$

uwzględniając wzór (4.20) otrzymujemy:

$$qE = qv_d B, \quad (4.23)$$

$$E = v_d B. \quad (4.24)$$

Gdy rozpatrywana płytka jest dostatecznie długa, poprzeczne pole elektryczne wewnątrz niej można uważać za jednorodne. Bezwzględna wartość różnicy potencjałów między punktami A i B wynosi wtedy:

$$U_H = Ea = v_d Ba, \quad (4.25)$$

gdzie a — szerokość płytki (por. rys. 4.9). Natężenie I prądu, płynącego w płytce, wyraża się wzorem:

$$I = jS = qn_0 v_d ab, \quad (4.26)$$

gdzie n_0 — koncentracja nośników ładunku, $S = ab$ — powierzchnia przekroju poprzecznego płytki (b — grubość płytki, mierzona w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku). Zgodnie z tym wzorem:

$$v_{da} = \frac{I}{qn_0b}. \quad (4.27)$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (4.25) otrzymujemy:

$$U_H = \frac{1}{qn_0} \cdot \frac{IB}{b}. \quad (4.28)$$

Z ostatniego wzoru wynika, że napięcie Halla U_H jest wprost proporcjonalne do natężenia prądu I oraz indukcji pola magnetycznego B a odwrotnie proporcjonalne do grubości płytki b , co potwierdzają doświadczenia. Wielkość:

$$\boxed{R_H = \frac{1}{qn_0}} \quad (4.29)$$

nazywa się *stałą Halla* i może być wyznaczona na podstawie pomiaru napięcia Halla. Wzór (4.28) można więc zapisać jako:

$$\boxed{U_H = R_H \frac{IB}{b}}. \quad (4.30)$$

Należy zwrócić uwagę, że znak napięcia Halla zależy, dla ustalonego kierunku przepływu prądu i kierunku pola magnetycznego, od znaku q nośników prądu. Przyjmuje się, że gdy $q \geq 0$, to $R_H \geq 0$ oraz $U_H \geq 0$. Dwa ostatnie równania spełniają tę konwencję znaków. Na podstawie zjawiska Halla można więc określić znak ładunku nośników prądu oraz, zgodnie z przedostatnim równaniem, ich koncentrację:

$$n_0 = \frac{1}{qR_H}. \quad (4.31)$$

Ponieważ przewodnictwo elektryczne większości metali jest związane z obecnością w nich swobodnych elektronów, stała R_H powinna być dla nich ujemna ($q = -e$). Tak też jest w istocie, przy czym w przypadku metali alkalicznych (Li, Na, K, ...) koncentracja elektronów przewodzenia jest równa w przybliżeniu gęstości atomów w danym metalu (każdy atom metalu oddaje jeden swobodny elektron). Jednakże istnieją metale (np. Zn, Ca, Pb, Fe) dla których stała R_H ma wartość dodatnią. W wymienionych metalach nośnikami prądu są tzw. dziury, posiadające ładunek dodatni. W półprzewodnikach, w ogólnym przypadku, prąd elektryczny przenoszą zarówno elektrony jak i dziury. Na podstawie znaku stałej Halla można stwierdzić, która z tych składowych prądu ma dominujące znaczenie. Jeżeli przewodnictwo elektryczne ciała stałego jest związane z ruchem nośników ładunku określonego rodzaju, to mierząc jego przewodnictwo elektryczne i stałą Halla można wyznaczyć koncentrację n_0 i ruchliwość μ nośników, a stąd ich średni czas relaksacji i średnią drogą swobodną (por. podrozdział 3.4).

4.3 Siła działająca na przewodnik z prądem w polu magnetycznym

Jak stwierdzono poprzednio, na elektryczny ładunek, poruszający się w polu magnetycznym, działa siła. Ponieważ przepływ prądu przez przewodnik polega na ruchu w nim ładunków, na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym powinna również działać siła. Zjawisko to odkryli istotnie H. Oersted i A.M. Ampère. Jest ono wykorzystywane w wielu urządzeniach technicznych, m.in. w silnikach elektrycznych i elektrycznych przyrządach pomiarowych.

Obliczmy teraz wielkość siły, działającej na odcinek przewodnika o długości Δl , przez który płynie prąd o natężeniu I , umieszczony w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} (rys. 4.10). Oznaczając przez Δq sumaryczny ładunek nośników w wyodrębnionej części przewodnika, przez \mathbf{v}_d — ich prędkość dryfu a przez $\Delta \mathbf{l}$ — odcinek przewodnika skierowany zgodnie z kierunkiem przepływu prądu, siłę $\Delta \mathbf{F}$ działającą na ten odcinek można wyrazić wzorem:

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta q(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}). \quad (4.32)$$

Ale, z definicji natężenia prądu:

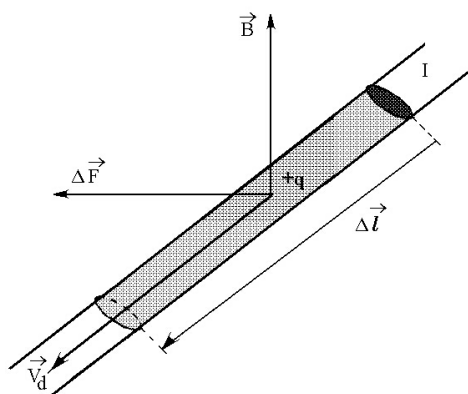
$$\Delta q = I \Delta t, \quad (4.33)$$

gdzie Δt jest czasem przejścia przez nośniki ładunku odległości Δl . Zatem:

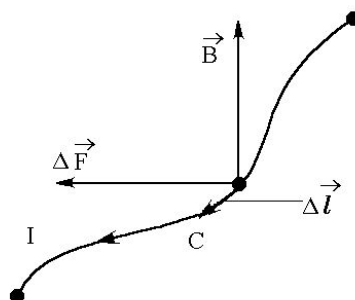
$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta t(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) = I[(\mathbf{v}_d \Delta t) \times \mathbf{B}]. \quad (4.34)$$

Biorąc pod uwagę, że $\mathbf{v}_d \Delta t = \Delta \mathbf{l}$, otrzymujemy stąd wzór:

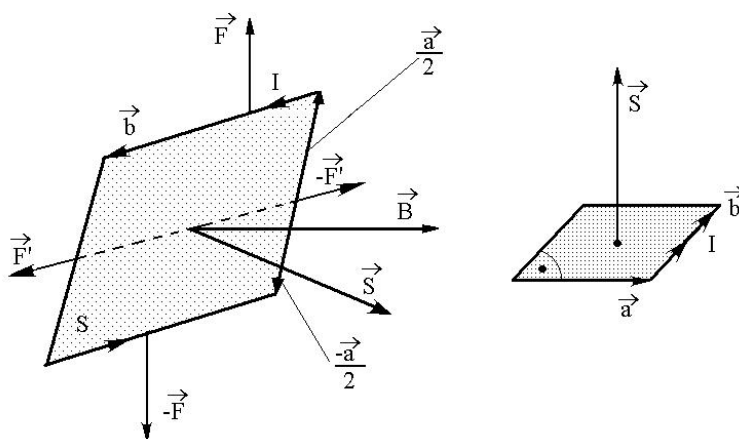
$$\boxed{\Delta \mathbf{F} = I(\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B})}. \quad (4.35)$$



Rysunek 4.10:



Rysunek 4.11:



Rysunek 4.12:

W przypadku przewodnika w kształcie dowolnej krzywej C (rys. 4.11), w celu obliczenia działającej na niego wypadkowej siły \mathbf{F} należy wykonać całkowanie po długości przewodnika:

$$\mathbf{F} = -I \int_C \mathbf{B} \times d\mathbf{l} \quad (4.36)$$

(dla nadania wzorowi „ładniejszego” wyglądu zamieniono kolejność czynników w iloczynie wektorowym).

Znajdziemy obecnie wartość momentu siły \mathbf{M} , obracającego prostokątną ramkę o bokach a i b , przez którą płynie prąd I , umieszczoną w polu o indukcji \mathbf{B} (rys. 4.12). Jak widać z rysunku, wypadkowy moment siły dąży do ustawienia ramki w kierunku prostopadłym do linii sił pola magnetycznego. Moment siły \mathbf{M} można wyrazić wzorem:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{a}}{2} \times \mathbf{F} + \left(-\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \times (-\mathbf{F}) = \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \quad (4.37)$$

Ponieważ siła \mathbf{F} , działająca na bok b ramki, jest równa:

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{b} \times \mathbf{B}), \quad (4.38)$$

więc

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \times [I(\mathbf{b} \times \mathbf{B})] = I[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{B})] = I[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}]. \quad (4.39)$$

Wprowadzając wektor \mathbf{S} o bezwzględnej wartości równej polu powierzchni ramki (rys. 4.12):

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (4.40)$$

ostatni wzór można zapisać jako:

$$\mathbf{M} = I(\mathbf{S} \times \mathbf{B}) = (I\mathbf{S}) \times \mathbf{B}. \quad (4.41)$$

Ma on postać podobną do wzoru określającego moment siły, działający na dipol elektryczny w elektrycznym polu (por. podrozdział 1.11). Można uważać więc, że ramka z prądem posiada *magnetyczny moment dipolowy*:

$$\boxed{\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}} \quad (4.42)$$

o wymiarze

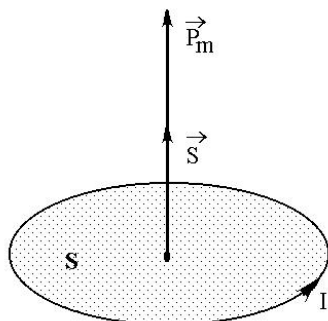
$$[p_m] = \text{A} \cdot \text{m}^2. \quad (4.43)$$

Wzór (4.41) można teraz napisać jako:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}}, \quad (4.44)$$

w pełnej analogii ze wzorem określającym moment siły działający na dipol elektryczny. W podobny sposób, jak w przypadku dipola elektrycznego można wykazać, że energia potencjalna magnetycznego dipola, znajdującego się w polu magnetycznym, wynosi:

$$\boxed{E_p = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}}. \quad (4.45)$$



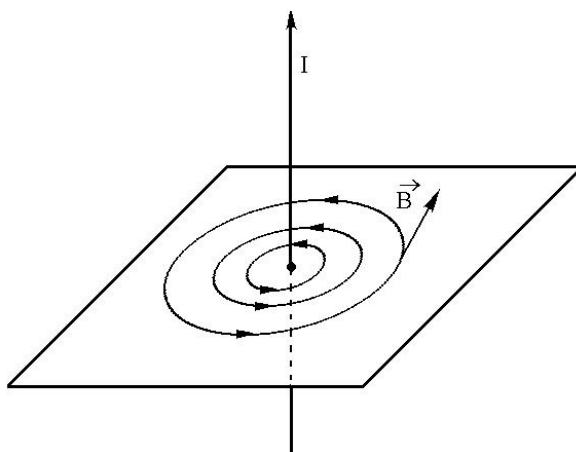
Rysunek 4.13:

Można udowodnić, że wzór (4.42), definiujący moment magnetyczny obwodu z prądem, jest słuszny dla płaskiego obwodu o dowolnym kształcie (rys. 4.13) a nie tylko dla prostokątnej ramki. Należy zauważyć, że zwrot wektora momentu magnetycznego \mathbf{p}_m określa reguła śruby prawoskrętnej.

4.4 Prawo Biota-Savarta-Laplace'a

Na przewodnik z prądem, umieszczony w polu magnetycznym, działa określona siła. Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona, identyczna co do wartości siła powinna działać ze strony przewodnika na magnes wytwarzający pole. Przewodnik, przez który płynie prąd, jest więc źródłem pola magnetycznego. Magnetyczne działanie prądu odkrył w 1820 r. H. Oersted. Stwierdził on, że igła magnetyczna, umieszczona w pobliżu przewodnika, wychyla się gdy przez przewodnik płynie prąd. Było to pierwsze doświadczenie, wykazujące związek między zjawiskami elektrycznymi i magnetycznymi, które zapoczątkowało badania zjawisk elektromagnetycznych. W przypadku pola magnetycznego prostoliniowego przewodnika linie sił pola magnetycznego są, jak łatwo stwierdzić doświadczalnie, koncentrycznymi okręgami a ich zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej (rys. 4.14).

Uczeni francuscy, J. Biot i F. Savart próbowali znaleźć ogólny wzór, za pomocą którego można obliczyć indukcję pola magnetycznego, pochodzącą od przewodnika z prądem o dowolnym kształcie. Stwierdzili oni, że indukcja pola magnetycznego jest wprost proporcjonalna do natężenia prądu płynącego w przewodniku i podali takie wzory dla kilku przypadków, m.in. dla przewodnika prostoliniowego i dla przewodnika w kształcie zwoju. Jednak ogólne rozwiązanie tego zagadnienia podał dopiero inny francuski uczony, P. Laplace. Laplace przyjął, że indukcja \mathbf{B} w danym punkcie, wytworzona



Rysunek 4.14:

przez przewodnik z prądem, stanowi sumę wektorową indukcji $\Delta \mathbf{B}_i$, pochodzących od małych odcinków $\Delta \mathbf{l}_i$ tego przewodnika. Tym samym Laplace zakładał, że przy nakładaniu się pól magnetycznych obowiązuje zasada superpozycji pól, analogicznie jak w przypadku pól elektrycznych.

Otrzymany przez Laplace'a wzór nazywany obecnie prawem Biota-Savarta-Laplace'a. Przytoczmy obecnie proste rozumowanie, pozwalające otrzymać to prawo, oparte na pojęciu „ładunku magnetycznego”. Zgodnie z omówionymi w podrozdziale 1.2 doświadczeniami Coulomba, wzory określające indukcję pola magnetycznego pojedynczego ładunku punktowego q_m i siłę, działającą na ten ładunek w polu magnetycznym, powinny mieć analogiczną postać jak w elektrostatyce:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_m \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{F} = q_m \mathbf{B}. \quad (4.47)$$

Występujący w pierwszym wzorze współczynnik μ_0 nazywa się *przenikalnością magnetyczną próżni* i stanowi odpowiednik przenikalności elektrycznej próżni ε_0 w elektrostatyce. Na podstawie podanych wzorów można stwierdzić, że jego wymiarem jest:

$$[\mu_0] = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (4.48)$$

Jak będzie pokazane dalej w tym podrozdziale, wartość liczbowa przenikalności magnetycznej próżni wynosi:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}. \quad (4.49)$$

Założymy teraz, że odcinek $\Delta \mathbf{l}$ przewodnika z prądem o natężeniu I znajduje się w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B}' (rys. 4.15). Zgodnie z wzorem (4.35), podanym w poprzednim podrozdziale, siła $\Delta \mathbf{F}'$ działająca na ten odcinek wynosi:

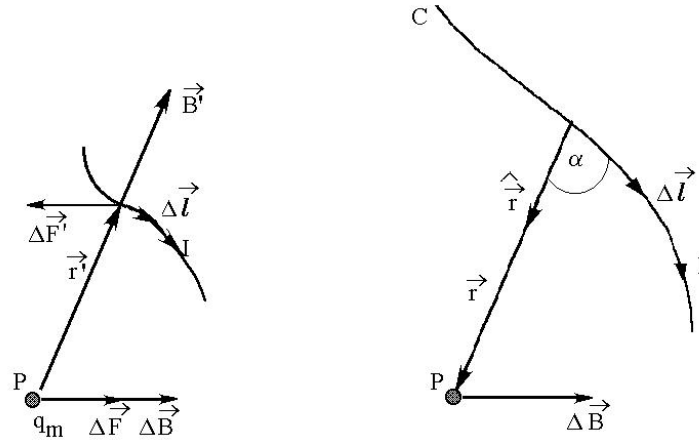
$$\Delta \mathbf{F}' = I(\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B}'). \quad (4.50)$$

Można przyjąć, że pole magnetyczne \mathbf{B}' zostało wytworzone przez punktowy ładunek magnetyczny q_m , którego położenie względem odcinka określa wektor \mathbf{r}' . Zatem:

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 q_m \hat{\mathbf{r}}'}{4\pi r'^2}, \quad (4.51)$$

oraz:

$$\Delta \mathbf{F}' = I \left[\Delta \mathbf{l} \times \frac{\mu_0 q_m \hat{\mathbf{r}}'}{4\pi r'^2} \right] = q_m \frac{\mu_0 I (\Delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}')}{4\pi r'^2}. \quad (4.52)$$



Rysunek 4.15:

Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona, na ładunek magnetyczny q_m będzie działać siła $\Delta \mathbf{F}$ o identycznej wartości liczbowej i przeciwnym kierunku, $\Delta \mathbf{F} = -\Delta \mathbf{F}'$. Na tej podstawie można wyznaczyć wartość indukcji $\Delta \mathbf{B}$ pola magnetycznego przewodnika w punkcie P , w którym znajduje się ładunek magnetyczny. Wprowadzając jeszcze wektor $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$, skierowany od odcinka przewodnika do punktu P , otrzymujemy wzór:

$$\Delta \mathbf{F} = -q_m \frac{\mu_0 I [\Delta \mathbf{l} \times (-\hat{\mathbf{r}})]}{4\pi r^2}, \quad (4.53)$$

który na podstawie zależności:

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\Delta \mathbf{F}}{q_m} \quad (4.54)$$

daje prawo Biota-Savarta-Laplace'a:

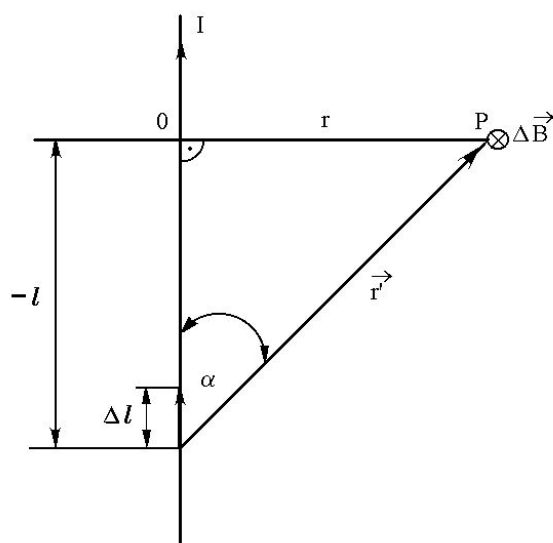
$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I (\Delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}})}{4\pi r^2}. \quad (4.55)$$

Jak z niego wynika, wektor indukcji $\Delta \mathbf{B}$ jest prostopadły do wektorów $\Delta \mathbf{l}$ i \mathbf{r} i ma wartość liczbową:

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (4.56)$$

gdzie α jest kątem między wektorami $\Delta \mathbf{l}$ i \mathbf{r} (rysunek 4.15). Indukcję \mathbf{B} pola magnetycznego, wytworzoną przez cały przewodnik o kształcie krzywej C oblicza się, sumując wektory indukcji, pochodzące od poszczególnych elementów przewodnika:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\hat{\mathbf{r}} \times d\mathbf{l}}{r^2}. \quad (4.57)$$



Rysunek 4.16:

W podanym wzorze zamieniono kolejność czynników w iloczynie wektorowym.

Obliczmy teraz, korzystając z prawa Biota-Savarta-Laplace'a, indukcję pola magnetycznego w odległości r od nieskończenie długiego, prostoliniowego przewodnika, przez który płynie prąd o natężeniu I (rys. 4.16). Indukcja pola magnetycznego $\Delta \mathbf{B}$ z poszczególnych elementów przewodnika $\Delta \mathbf{l}$ ma w punkcie P ten sam kierunek i zwrot, wobec czego sumuje się algebraicznie. Wartość indukcji ΔB wynosi:

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r'^2}, \quad (4.58)$$

wobec czego wartość indukcji B pola magnetycznego całego przewodnika wyraża się całką:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r'^2} dl. \quad (4.59)$$

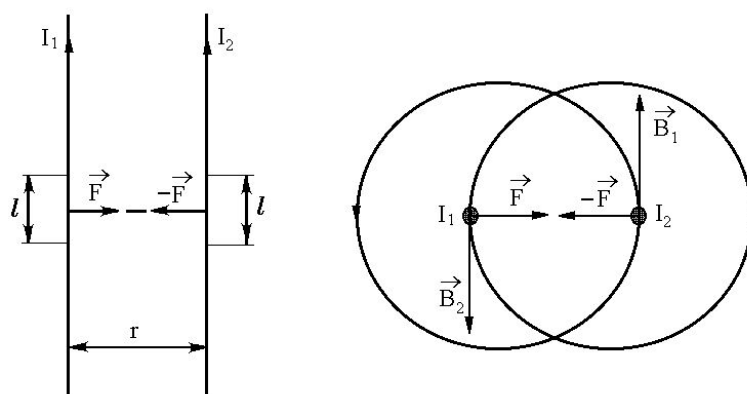
Można ją łatwo obliczyć, wprowadzając za nową zmienną całkowanie kąt α . Zgodnie z rysunkiem 4.16 zachodzą zależności:

$$r' = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad (4.60)$$

$$l = -r \operatorname{ctg} \alpha. \quad (4.61)$$

Obliczając różniczkę ostatniego wyrażenia otrzymujemy:

$$dl = \frac{r}{\sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (4.62)$$



Rysunek 4.17:

Zatem:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \sin \alpha \frac{r}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{1}{r} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{r} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{2}{r}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Zgodnie ze wzorem (4.59) indukcja pola magnetycznego prostoliniowego przewodu wyraża się wzorem:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}. \quad (4.64)$$

Jeżeli umieścimy równoległe do siebie dwa prostoliniowe przewody z prądem, wystąpią między nimi siły przyciągania lub odpychania, odpowiednio w przypadku przepływu prądów w zgodnych lub przeciwnych kierunkach (rys. 4.17). Każdy z przewodników wytwarza pole magnetyczne, które oddziałuje na drugi przewód. Obliczymy siłę F , z jaką jeden przewód działa na odcinek l drugiego przewodu, jeżeli odległość przewodników wynosi r a natężenia prądów są równe I_1 i I_2 . Pierwszy przewód wytwarza pole magnetyczne o indukcji:

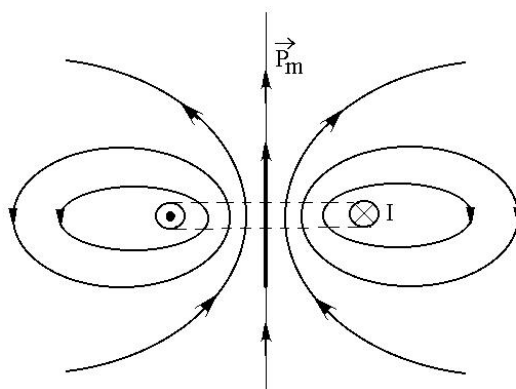
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \quad (4.65)$$

Na odcinek l drugiego przewodu działa siła:

$$F = I_2 l B_1, \quad (4.66)$$

czyli, uwzględniając poprzedni wzór:

$$\boxed{F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}}. \quad (4.67)$$



Rysunek 4.18:

Obliczymy wartość tej siły, jeżeli $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$, $r = l = 1 \text{ m}$:

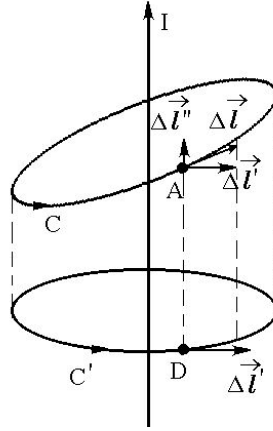
$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1\text{A} \cdot 1\text{A} \cdot 1\text{m}}{2\pi \cdot 1\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{N}. \quad (4.68)$$

W układzie jednostek MKSA wzajemne oddziaływanie przewodników z prądem wykorzystuje się do zdefiniowania jednostki natężenia prądu — ampera. Uproszczoną definicję można sformułować następująco: amper jest natężeniem prądu, który płynąc w dwóch równoległych nieskończenie długich przewodach, umieszczonych w próżni w odległości 1 m, wywołuje między tymi przewodami siłę $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ na metr długości przewodnika.

W podrozdziale 4.3 wykazano, że moment siły, działający na płaski obwód z prądem w polu magnetycznym określa wzór podobny do wzoru przedstawiającego moment siły, obracający dipol elektryczny. Obwód z prądem ma więc określony moment magnetyczny, będący odpowiednikiem momentu elektrycznego dipola. Korzystając z prawa Biota-Savarta-Laplace'a można wykazać, że pole magnetyczne w dużych odległościach od płaskiego obwodu z prądem wyraża się wzorem, analogicznym do wzoru dla pola elektrycznego dipola. Można więc istotnie pole obwodu z prądem uważać za pole dipola magnetycznego. Przebieg linii sił kołowego przewodnika, w płaszczyźnie prostopadłej do niego, pokazuje schematycznie rysunek 4.18.

4.5 Prawo Ampère'a

Obliczenie indukcji pola magnetycznego przewodnika z prądem na podstawie prawa Biota-Savarta-Laplace'a wymaga całkowania po elementach długości przewodnika. W przypadku, gdy pole magnetyczne przewodnika cechuje wysoki stopień symetrii, indukcję pola można niekiedy obliczyć w inny sposób, korzystając z tzw. prawa Ampère'a. Jeżeli uważać prawo Biota-Savarta-Laplace'a za odpowiednik prawa Coulomba w elektrostatyce, to odpowiednikiem prawa Ampère'a jest w elektrostatyce prawo Gaussa.



Rysunek 4.19:

Załóżmy teraz, że pole magnetyczne jest wytwarzane przez nieskończenie długi prostoliniowy przewodnik, przez który płynie prąd o natężeniu I . Będziemy obliczać cyrkulację wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} po dowolnej krzywej C , obejmującej ten przewodnik:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.69)$$

Będziemy zakładać że kierunek obiegu krzywej C odpowiada kierunkowi obrotu śruby prawoskrętnej, która przesuwa się zgodnie z kierunkiem przepływu prądu w przewodniku.

Wykażemy najpierw, że cyrkulacja (4.69) po dowolnej krzywej C jest równa cyrkulacji po krzywej C' , będącej rzutem krzywej C na płaszczyznę prostopadłą do przewodnika (rys. 4.19). Element długości $\Delta\mathbf{l}$ krzywej C można przedstawić jako sumę geometryczną jego składowej $\Delta\mathbf{l}'$, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika, oraz składowej $\Delta\mathbf{l}''$, równoległej do przewodnika:

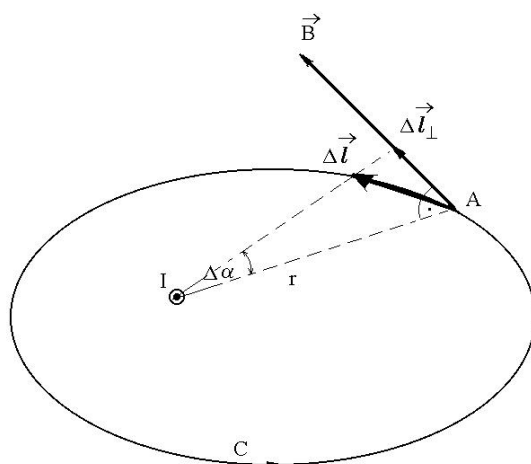
$$\Delta\mathbf{l} = \Delta\mathbf{l}' + \Delta\mathbf{l}''. \quad (4.70)$$

Wektor indukcji $\Delta\mathbf{B}$ (nie pokazany na rysunku) leży w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika. Wobec tego:

$$\mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{l} = \mathbf{B} \cdot (\Delta\mathbf{l}' + \Delta\mathbf{l}'') = \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{l}'. \quad (4.71)$$

Ponieważ odległości punktów A i D od przewodnika są jednakowe, indukcja pola magnetycznego \mathbf{B} ma w obu punktach tę samą wartość i kierunek. Wynika stąd równość cyrkulacji indukcji pola magnetycznego po obu krzywych:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}'. \quad (4.72)$$



Rysunek 4.20:

Możemy więc dalej bez ograniczenia ogólności wyników zakładać, że krzywa, po której obliczamy cyrkulację indukcji magnetycznej, leży w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika.

Z rysunku 4.20 widać, że całka po małym odcinku krzywej C , położonej w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika, wyraża się wzorem:

$$\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{l} = B \cdot \Delta l_{\perp} = B \Delta l_{\perp}, \quad (4.73)$$

gdzie Δl_{\perp} jest składową elementu długości $\Delta \mathbf{l}$, prostopadłą w punkcie A do promienia r . Ponieważ wartość indukcji pola magnetycznego w tym punkcie wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (4.74)$$

więc:

$$\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\Delta l_{\perp}}{r}. \quad (4.75)$$

Ostatni czynnik w powyższym wzorze jest równy kątowi $\Delta\alpha$, określającego długość elementu $\Delta \mathbf{l}$ (por. rys. 4.20):

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta l_{\perp}}{r}. \quad (4.76)$$

Otrzymujemy zatem wzór:

$$\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta\alpha. \quad (4.77)$$

Wynika z niego, że cyrkulacja wektora indukcji \mathbf{B} po krzywej C wyraża się wzorem:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi, \quad (4.78)$$

czyli:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I}. \quad (4.79)$$

Jest to, napisane dla przypadku pojedynczego przewodnika, *prawo Ampère'a*. Można udowodnić, że w przypadku, gdy zamknięta krzywa C nie obejmuje przewodnika z prądem, to cyrkulacja wektora indukcji \mathbf{B} po tej krzywej jest równa zeru:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (4.80)$$

Korzystając z zasady superpozycji pól magnetycznych, prawo Ampère'a można uogólnić na przypadek pola magnetycznego, wytworzonego przez dowolną liczbę prostoliniowych przewodników z prądem. We wzorze (4.79) I oznacza wtedy algebraiczną sumę natężeń prądów wszystkich przewodników, które otacza krzywa C :

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (4.81)$$

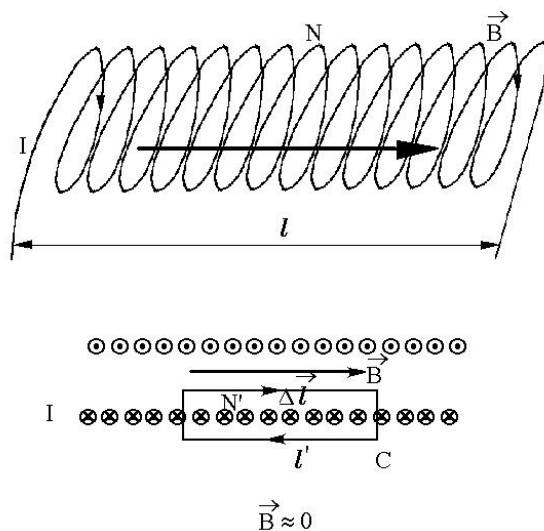
Jeżeli prąd o natężeniu I_i płynie w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu śruby prawoskrętnej, obracającej się zgodnie z kierunkiem obiegu krzywej C , natężenie prądu I_i uważamy za dodatnie, w przeciwnym przypadku — za ujemne. Można udowodnić, że powyższe sformułowanie prawa Ampère'a pozostaje słuszne w przypadku gdy pole magnetyczne jest wytwarzane przez układ przewodników o dowolnym kształcie (niekoniecznie prostoliniowych).

Zastosujemy teraz prawo Ampère'a w celu obliczenia indukcji pola magnetycznego długiego solenoidu (rys. 4.21). Założymy, że długość solenoidu wynosi l , liczba jego zwojów N a natężenie płynącego w nim prądu I . Wiadomo z doświadczenia, że wewnątrz solenoidu, z dala od jego końców, pole magnetyczne jest jednorodne i ma kierunek równoległy do osi solenoidu. Prawo Ampère'a przyjmuje teraz postać:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N' I, \quad (4.82)$$

gdzie N' jest liczbą zwojów solenoidu obejmowanych przez krzywą C . Cyrkulacja pola magnetycznego po krzywej C jest równa:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B l', \quad (4.83)$$



Rysunek 4.21:

gdzie l' jest szerokością konturu C . Porównując dwa ostatnie wzory otrzymujemy:

$$B = \frac{\mu_0 I N'}{l'}. \quad (4.84)$$

Jeżeli solenoid jest nawinięty ze stałą gęstością, to:

$$\frac{N'}{l'} = \frac{N}{l}, \quad (4.85)$$

skąd wynika wzór:

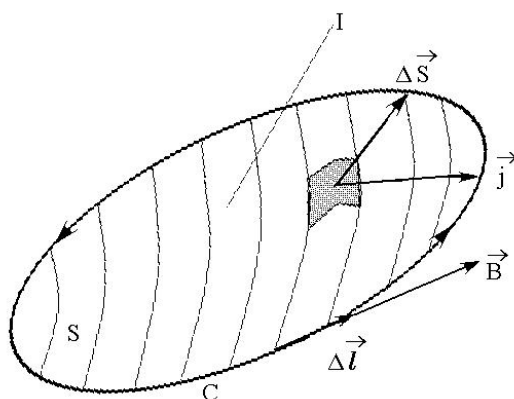
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I N}{l}}. \quad (4.86)$$

Przekształcimy obecnie prawo Ampère'a do różniczkowej postaci. Założymy, że wewnątrz przewodnika, przez który płynie prąd znajduje się niezamknięta powierzchnia S , której brzeg stanowi krzywa C (rys. 4.22). Całkowite natężenie prądu I , przepływającego przez powierzchnię S , wyraża się całką powierzchniową z gęstości prądu \mathbf{j} :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.87)$$

Należy zauważyć, że wektor $\Delta\mathbf{S}$, prostopadły do niewielkiego elementu powierzchni ΔS , ma kierunek zgodny z kierunkiem ruchu śruby prawoskrętnej, obracającej się w kierunku obiegu krzywej C . Korzystając z ostatniego wzoru, prawo Ampère'a można obecnie zapisać jako:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.88)$$



Rysunek 4.22:

Na podstawie twierdzenia Stokesa (por. podrozdział 1.10) cyrkulację wektora indukcji pola magnetycznego można wyrazić przez całkę powierzchniową z rotacji tego wektora:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.89)$$

Z ostatnich dwóch wzorów otrzymujemy więc:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.90)$$

Ponieważ powyższy wzór jest słuszny dla dowolnej powierzchni S , otrzymujemy stąd wzór:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}, \quad (4.91)$$

przedstawiający prawo Ampère'a w różniczkowej postaci. Prawo to, łącznie z prawem Gaussa,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.92)$$

(podrozdział 4.1), stanowi kompletny układ równań magnetostatyki.