

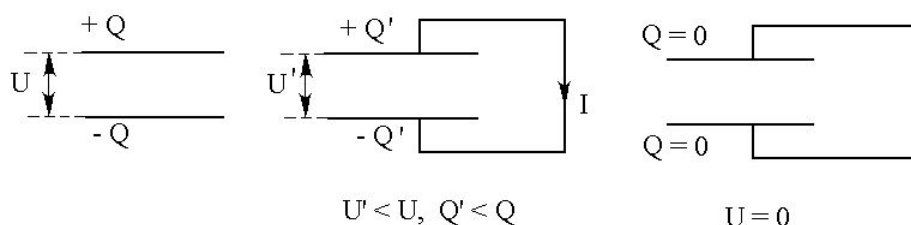
Rozdział 3

Prąd elektryczny stały

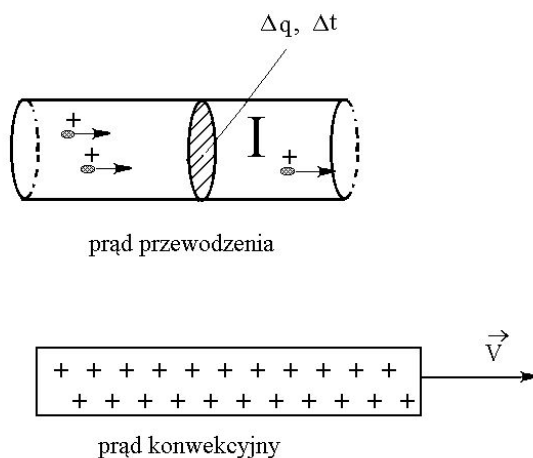
3.1 Natężenie i gęstość prądu. Równanie ciągłości

W poprzednich rozdziałach były rozpatrywane zjawiska związane z nieruchomymi ładunkami elektrycznymi. Omówimy obecnie zjawiska zachodzące podczas ruchu ładunków. Jak wiadomo, w stanie ustalonym wszystkie punkty przewodnika mają ten sam potencjał a natężenie pola elektrycznego wewnątrz niego jest równe zero. Jeżeli na przewodnik wprowadzimy ładunek, w przewodniku wytworzy się pole elektryczne. Ładunki elektryczne będą się wówczas przemieszczać aż do wyrównania się potencjałów wszystkich punktów przewodnika. Ogólnie prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany ruch ładunków elektrycznych w przestrzeni. W rozpatrywanym przykładzie występuje więc przepływ prądu wewnątrz przewodnika aż do momentu ustalenia się określonego rozkładu ładunku. Ma to np. miejsce w przypadku rozładowania kondensatora (rys. 3.1).

Prąd związany z przepływem ładunków w przewodniku nosi nazwę *prądu przewodzenia* (rys. 3.2). Kierunek przepływu prądu zależy od kierunku ruchu oraz od znaku przemieszczających się ładunków. Przyjmuje się, że prąd płynie od punktu (punktów) o wyższym potencjale do punktu (punktów) o



Rysunek 3.1:



Rysunek 3.2:

niższym potencjale, a więc kierunek przepływu prądu jest zgodny z kierunkiem ruchu ładunków dodatnich. Uporządkowany ruch ładunków występuje również podczas ruchu wiązki cząstek o określonym ładunku w próżni a także przy przemieszczaniu się naładowanego ciała (tzw. prąd konwekcyjny, rys. 3.2).

Dla określenia wielkości prądu wprowadza się pojęcie jego *natężenia* I . Natężeniem prądu nazywamy stosunek ładunku Δq , przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika, do czasu jego przepływu Δt :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

albo w postaci różniczkowej:

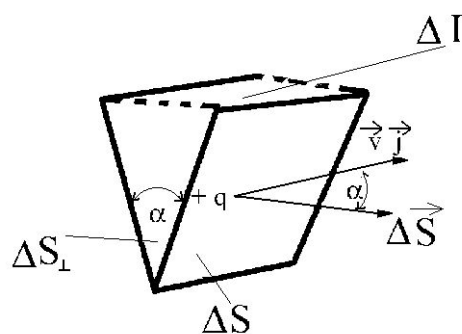
$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}. \quad (3.2)$$

Jednostką natężenia prądu jest amper:

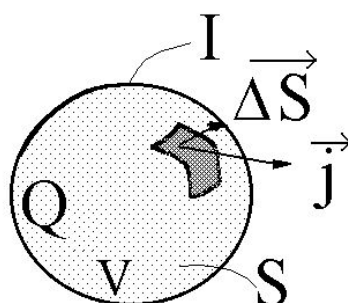
$$[I] = A. \quad (3.3)$$

Prąd elektryczny stały jest to prąd, którego natężenie nie zmienia się z czasem, $I = \text{const}$.

Natężenie określa wielkość prądu, przepływającego przez cały przekrój przewodnika. Dla scharakteryzowania rozkładu prądu w przewodniku wprowadza się pojęcie *wektora gęstości prądu* \mathbf{j} . Jest to wektor, którego kierunek jest zgodny z kierunkiem wektora prędkości \mathbf{v} dodatnich ładunków, a wartość bezwzględna jest równa stosunkowi natężenia prądu ΔI do wielkości prostopadłej powierzchni ΔS_{\perp} , przez którą przepływa prąd (rys. 3.3),



Rysunek 3.3:



Rysunek 3.4:

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S_{\perp}}, \quad (3.4)$$

albo w symbolice różniczkowej:

$$\boxed{j = \frac{dI}{dS_{\perp}}}. \quad (3.5)$$

Wymiarem gęstości prądu jest:

$$[j] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (3.6)$$

Podamy obecnie tzw. *równanie ciągłości*, określające związek między szybkością zmian całkowitego ładunku, znajdującego się wewnątrz pewnego obszaru przewodnika, a natężeniem lub gęstością prądu, przepływającego przez powierzchnię S , ograniczającą ten obszar (rys. 3.4). Będziemy początkowo zakładać, że natężenie i gęstość prądu mogą zmieniać się z czasem w dowolny sposób. Przekształcając wzór (3.4) otrzymujemy:

$$\Delta I = j \Delta S_{\perp}. \quad (3.7)$$

Zgodnie z rysunkiem 3.3

$$\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha \quad (3.8)$$

i wobec tego prąd, przepływający przez powierzchnię ΔS , wynosi:

$$\Delta I = j \Delta S \cos \alpha = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S}. \quad (3.9)$$

Prąd wypływający przez zamkniętą powierzchnię S , ograniczającą dany obszar, jest więc równy:

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.10)$$

Ale, z definicji natężenia prądu wynika, że:

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.11)$$

gdzie Q jest sumarycznym ładunkiem, zawartym w danej chwili wewnątrz powierzchni S . Znak minus wynika z faktu, że prąd ładunków wypływających z danego obszaru uważamy za dodatni i ładunek Q w tym przypadku będzie malał z czasem. Porównując dwa ostatnie wzory otrzymujemy równanie ciągłości, zapisane w całkowej postaci:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0}. \quad (3.12)$$

Równanie to wyraża prawo zachowania ładunku elektrycznego: szybkość zmiany ładunku wewnątrz zamkniętej powierzchni musi być, co do bezwzględnej wartości, równa szybkości, z jaką ładunek przepływa przez tę powierzchnię. W przypadku prądu stałego ładunek Q , zawarty wewnątrz dowolnego obszaru przewodnika, i gęstość ładunku ρ nie mogą się zmieniać, $Q = const$ i $\rho = const$. Ostatni wzór przyjmuje wtedy postać:

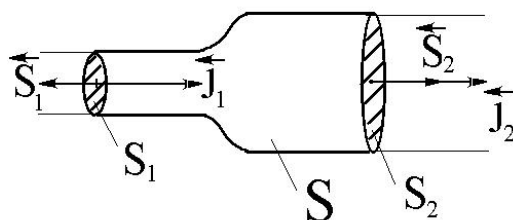
$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.13)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa, równanie ciągłości można przekształcić do postaci różniczkowej (por. analogiczne przekształcenie z podrozdziału 2.2). W rezultacie otrzymuje się równanie:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0}, \quad (3.14)$$

stosujące się do ogólnego przypadku zależnej od czasu gęstości prądu. W przypadku prądu stałego z powyższego równania otrzymuje się:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3.15)$$



Rysunek 3.5:

W celu zilustrowania fizycznego sensu równania ciągłości rozpatrzmy prosty przykład przepływu prądu stałego przez przewodnik o zmiennym przekroju (rys. 3.5). Stosując równanie ciągłości (3.13) do fragmentu przewodnika, ograniczonego przekrojami S_1 i S_2 i zakładając, że gęstość prądu na tych przekrojach ma stałą wartość, otrzymujemy:

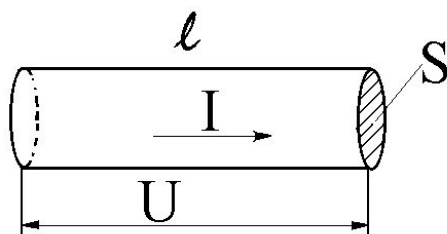
$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -j_1 S_1 + j_2 S_2 = 0, \quad (3.16)$$

$$j_1 S_1 = j_2 S_2. \quad (3.17)$$

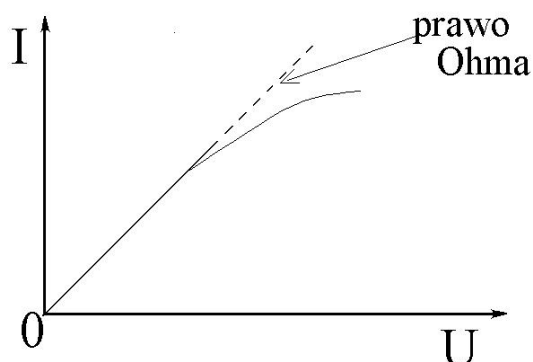
Zależność ta wyraża równość natężenia prądu, przepływającego przez oba przekroje przewodnika, $I_1 = I_2$.

3.2 Prawo Ohma i prawo Joule'a-Lenza

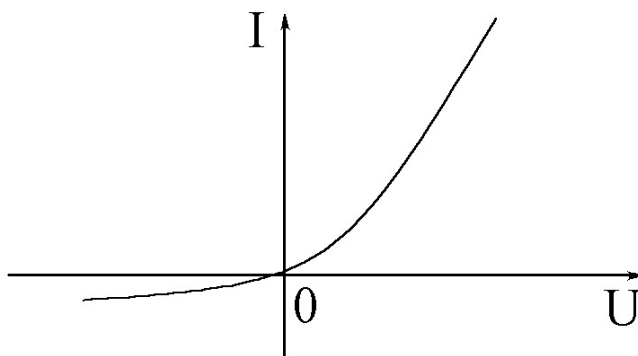
Jak już stwierdzono, dla wywołania przepływu prądu elektrycznego w przewodniku niezbędne jest wytworzenie różnicy potencjałów między określonymi jego punktami. Jeżeli będziemy utrzymywać stałe napięcie między końcami odcinka przewodu, to natężenie prądu płynącego przez tę część przewodnika będzie miało stałą wartość. W r. 1826 Ohm wykazał, że dla przewodników metalicznych natężenie prądu I , płynącego przez przewod-



Rysunek 3.6:



Rysunek 3.7:



Rysunek 3.8:

nik, jest wprost proporcjonalne do napięcia U na jego końcach (rys. 3.6):

$$\frac{I}{U} = \text{const.} \quad (3.18)$$

Wielkość

$$\boxed{R = \frac{U}{I}}, \quad (3.19)$$

niezależną od wartości U i I nazywamy *oporem elektrycznym* danego przewodnika. Jednostką oporu jest om:

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega. \quad (3.20)$$

Prawo Ohma stosuje się również, dla dość szerokiego zakresu przykładowych napięć i prądów, do półprzewodników oraz, w określonych warunkach, do cieczy i gazów. Nie należy uważać jednak prawa Ohma za uniwersalne.

W przypadku przepływu prądu przez przewodniki niemetaliczne — półprzewodniki stwierdzono występowanie odstępstw od prawa Ohma dla wartości natężeń wewnętrznego pola $E \gtrsim 10^5 \div 10^6$ V/cm (rys. 3.7). Prawo Ohma nie stosuje się też w przypadku połączenia dwóch półprzewodników lub półprzewodnika i metalu (rys. 3.8).

Doświadczenie pokazuje, że opór przewodnika o stałym przekroju poprzecznym jest wprost proporcjonalny do jego długości l i odwrotnie proporcjonalny do powierzchni S przekroju poprzecznego (rys. 3.6):

$$\boxed{R = \varrho \frac{l}{S}}. \quad (3.21)$$

Współczynnik ϱ zależy od rodzaju przewodnika; nazywa się go *oporem właściwym*. Wymiarem oporu właściwego jest:

$$[\varrho] = \Omega \cdot \text{m}. \quad (3.22)$$

Oprócz oporu właściwego można określić również *przewodnictwo właściwe* σ danego przewodnika, będące odwrotnością oporu właściwego:

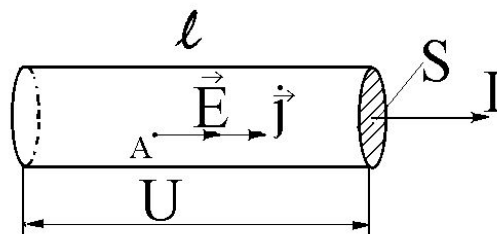
$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\varrho}}. \quad (3.23)$$

Ma ono wymiar:

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}. \quad (3.24)$$

Typowe wartości przewodnictwa elektrycznego metali w temperaturze pokojowej są rzędu $\sigma = 10^5 \div 10^6$ $\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$.

Prawo Ohma w dotychczasowym sformułowaniu wyraża związek między różnicą potencjałów na końcach odcinka przewodnika, a natężeniem prądu płynącego przez przewodnik. Można jednak zapisać prawo Ohma w tzw. postaci mikroskopowej, określającej związek między natężeniem pola i gęstością prądu w danym punkcie przewodnika. Rozpatrzmy ponownie przepływ



Rysunek 3.9:

prądu przez przewodnik o stałym przekroju poprzecznym (rys. 3.9). Jeżeli oba końce przekroju przewodnika są powierzchniami ekwipotencjalnymi, natężenie pola \mathbf{E} i gęstość prądu \mathbf{j} będą miały stałą wartość i kierunek we wszystkich punktach rozpatrywanego odcinka przewodnika:

$$E = \frac{U}{l}, \quad (3.25)$$

$$j = \frac{I}{S}. \quad (3.26)$$

Korzystając z zależności (3.21) i (3.23) zapiszemy teraz prawo Ohma w postaci:

$$\frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma S}, \quad (3.27)$$

skąd otrzymujemy wzór:

$$\frac{U}{l} = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{S}, \quad (3.28)$$

czyli, uwzględniając wzory (3.25) i (3.26):

$$E = \frac{j}{\sigma}, \quad (3.29)$$

$$j = \sigma E. \quad (3.30)$$

Biorąc pod uwagę, że wektory \mathbf{E} i \mathbf{j} mają ten sam kierunek, ostatni wzór można zapisać jako:

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}}. \quad (3.31)$$

Przedstawia on prawo Ohma w postaci mikroskopowej. Należy podkreślić, że wzór ten ma ogólniejszy charakter, niż prawo Ohma w makroskopowej postaci (wzory (3.19) i (3.21)). Jeżeli przewodnik prądu ma nieregularny kształt i natężenie pola oraz gęstość prądu zmieniają się od punktu do punktu, w celu obliczenia jego oporu trzeba korzystać z ostatniego wzoru.

Omawiając przepływ prądu elektrycznego jako przykład podaliśmy zjawisko rozładowania kondensatora. Naładowany kondensator posiada określoną energię, natomiast energia kondensatora po jego rozładowaniu jest równa zero. Początkowa energia kondensatora zamienia się w energię cieplną, wydzielającą się w przewodzie łączącym okładki kondensatora podczas przepływu prądu. Można więc stwierdzić, że przepływ prądu elektrycznego przez przewodnik powoduje wydzielanie się w nim ciepła, co można łatwo sprawdzić doświadczalnie.

Wyprowadzimy teraz wzór, określający energię cieplną wydzielaną w danym przewodniku przy przepływie prądu stałego. Rozważmy odcinek przewodnika, między końcami którego istnieje napięcie U i przez który płynie

prąd o natężeniu I (por. rys. 3.6 i 3.9). Przy przeniesieniu ładunku q przez ten przewodnik siły pola elektrycznego wykonują pracę

$$W = qU. \quad (3.32)$$

Ponieważ w przypadku przepływu prądu stałego

$$q = It, \quad (3.33)$$

gdzie t — czas przepływu ładunku q , więc:

$$\boxed{W = UIt}. \quad (3.34)$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii ostatnie wyrażenie musi być równa energii cieplnej, wydzielanej w przewodniku. Otrzymany wzór nosi nazwę *prawa Joule'a - Lenza*. Wydzielona w przewodniku moc prądu

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (3.35)$$

wyraża się więc wzorem:

$$\boxed{P = UI}. \quad (3.36)$$

Zapiszemy teraz ostatni wzór w postaci mikroskopowej. Jeżeli odcinek przewodnika ma kształt walca o długości l i przekroju S (rys. 3.6 i 3.9), to moc wydzielana w jednostkowej objętości przewodzącego ośrodka będzie równa:

$$p = \frac{P}{lS} = \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{S}, \quad (3.37)$$

$$[p] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}. \quad (3.38)$$

Ze wzorów (3.25) - (3.26) wynika wzór:

$$p = jE, \quad (3.39)$$

który, biorąc pod uwagę zgodność kierunków wektorów \mathbf{j} i \mathbf{E} , można zapisać jako:

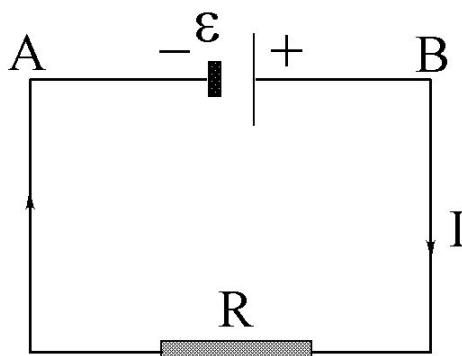
$$\boxed{p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}. \quad (3.40)$$

Jest to prawo Joule'a - Lenza w postaci mikroskopowej, ogólniejsze od podanego poprzednio. W przypadku gdy gęstość prądu i natężenie pola zmieniają się wewnątrz przewodnika, moc wydzielaną w przewodniku należy obliczać, całkując ostatnie wyrażenie po objętości przewodnika.

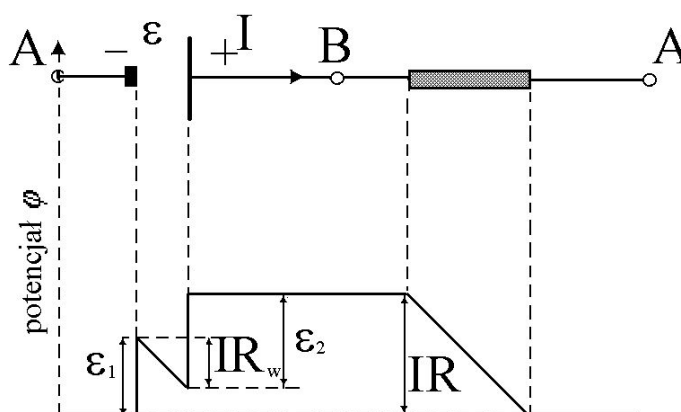
3.3 Siła elektromotoryczna. Prawo Ohma dla obwodu zamkniętego

W przypadku wprowadzenia na przewodnik ładunku przepływ prądu elektrycznego zachodzi jedynie do momentu wyrównania potencjałów w wszystkich punktów przewodnika. Dla wytworzenia prądu stałego niezbędne jest urządzenie, utrzymujące stałą różnicę potencjałów między końcami przewodnika. Do takich urządzeń należą baterie, akumulatory, prądnice. Nazywamy je ogólnie *źródłami siły elektromotorycznej*. Ponieważ przepływ prądu elektrycznego przez przewodnik powoduje wydzielanie się w nim ciepła, źródło siły elektromotorycznej dostarcza do obwodu energię elektryczną kosztem energii innego rodzaju — chemicznej w bateriach i akumulatorach, mechanicznej w prądnicach.

Rozpatrzmy teraz prosty zamknięty obwód, składający się ze źródła siły elektromotorycznej i przewodnika o oporze R , przedstawiony na rysun-



Rysunek 3.10:



Rysunek 3.11:

ku 3.10. Rysunek 3.11 pokazuje przebieg potencjału elektrycznego wzdłuż obwodu w przypadku, gdy źródłem siły elektromotorycznej jest ogniwo galwaniczne, składające się z dwóch różnych płytek przewodnika (elektrod), zanurzonych w określonym roztworze (elektrolicie). Należy zauważyć, że na granicy elektrod z elektrolitem potencjał zmienia się w nieciągły sposób: występują tam skoki potencjału o wartości \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 . W tych obszarach ładunki elektryczne poruszają się w kierunku przeciwnym do kierunku działających sił elektrostatycznych (w przypadku ładunków dodatnich — w kierunku wzrostu potencjału). Ruch taki może być spowodowany jedynie działaniem sił różnych od elektrostatycznych, nazywamy je zwykle siłami ubocznymi. W przypadku ogniwa galwanicznego przenoszenie ładunku elektrycznego przez granicę elektroda-elektrolit jest możliwe dlatego, że energia potrzebna na przejście skoku potencjału przez ładunek jest dostarczana w wyniku odpowiedniej reakcji chemicznej.

Biorąc pod uwagę, że suma skoków potencjału musi być równa sumie spadków potencjału na zewnętrznym oporze R i wewnętrznym oporze R_w źródła siły elektromotorycznej, co widać z rysunku, otrzymujemy zależność:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = IR + IR_w. \quad (3.41)$$

Ogólnie suma algebraiczna przyrostów potencjału przy obejści obwodu w kierunku przepływu prądu jest *siłą elektromotoryczną* \mathcal{E} danego ogniwa:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \quad (3.42)$$

Przedostatnie równanie można więc zapisać jako:

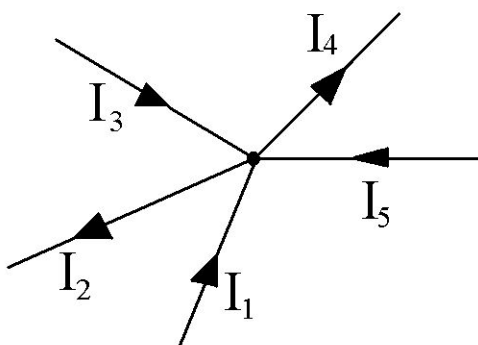
$$\boxed{\mathcal{E} = I(R + R_w)}. \quad (3.43)$$

Jest to tzw. *prawo Ohma dla obwodu zamkniętego*. Ponieważ spadek napięcia na zewnętrznym oporze R wynosi $U = IR$, ostatnie równanie można zapisać jako:

$$\mathcal{E} = U + IR_w. \quad (3.44)$$

Widać, że siła elektromotoryczna \mathcal{E} jest równa napięciu U między biegunami ogniwa tylko wówczas, gdy natężenie prądu $I = 0$, tj. w przypadku otwartego obwodu.

W przypadku złożonych obwodów elektrycznych w celu obliczenia płynących w nich prądów i napięć na ich elementach wygodnie jest korzystać z praw Kirchhoffa. W każdym obwodzie możemy wyróżnić tzw. węzły i oczka. Przez węzeł rozumiemy punkt połączenia co najmniej trzech przewodów (rys. 3.12). *Pierwsze prawo Kirchhoffa* odnosi się do węzłów i jest zapisanym w specyficznej postaci równaniem ciągłości. W stanie ustalonym ładunek dopływający do węzła w danym czasie powinien być równy ładunkowi



Rysunek 3.12:

odpływającym z węzła w tym samym czasie. Uważając ładunek i prąd dopływające do węzła za dodatnie, a odpływające z niego — za ujemne, można napisać:

$$\sum_{i=1}^n \Delta q_i = 0. \quad (3.45)$$

Dzieląc to wyrażenie przez czas przepływu ładunku Δt otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta q_i}{\Delta t} = 0, \quad (3.46)$$

czyli biorąc pod uwagę, że:

$$I_i = \frac{\Delta q_i}{\Delta t}, \quad (3.47)$$

wzór:

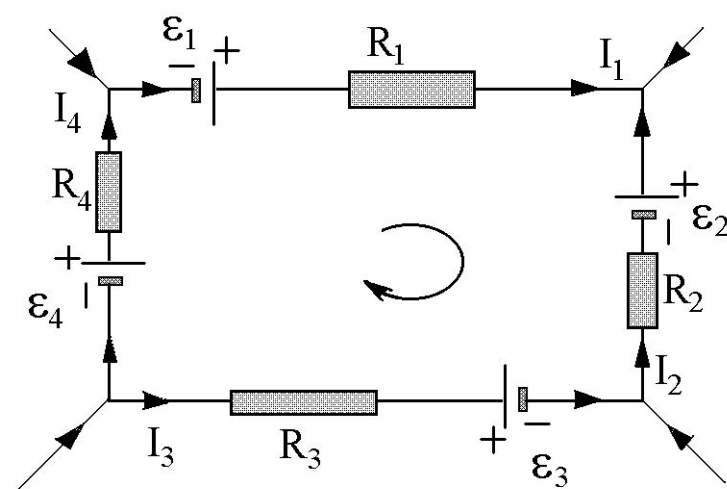
$$\boxed{\sum_{i=1}^n I_i = 0}. \quad (3.48)$$

Zgodnie z I prawem Kirchhoffa algebraiczna suma prądów, schodzących się w danym węźle, jest równa zero. Dla węzła pokazanego na rysunku 3.12 I prawo Kirchhoffa zapiszemy jako:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0. \quad (3.49)$$

Drugie prawo Kirchhoffa stosuje się do oczek — dowolnych zamkniętych fragmentów obwodu (rys. 3.13). Podobnie jak w przypadku rozpatrywanego poprzednio prostego obwodu zamkniętego suma algebraiczna spadków potencjału na poszczególnych oporach,

$$U_i = I_i R_i, \quad (3.50)$$



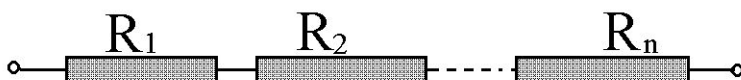
Rysunek 3.13:

jest równa sumie algebraicznej sił elektromotorycznych \mathcal{E}_j w całym zamkniętym fragmencie obwodu:

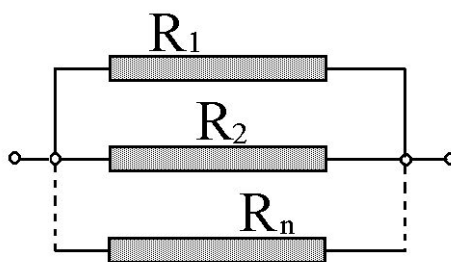
$$\boxed{\sum_{i=1}^m I_i R_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_j} . \quad (3.51)$$

Przy stosowaniu II prawa Kirchhoffa należy przestrzegać określonej konwencji, dotyczącej znaków prądów i sił elektromotorycznych. Zwykle wybiera się w dowolny sposób kierunek obiegu oczka (zgodnie z ruchem wskazówek zegara lub przeciwnie). Prąd o kierunku zgodnym z kierunkiem obiegu oczka przyjmujemy za dodatni, w przeciwnym przypadku — za ujemny. Siłę elektromagnetyczną uważamy za dodatnią, jeżeli powodowała by ona przepływ prądu w kierunku zgodnym z kierunkiem obiegu oczka i za ujemną w przeciwnym przypadku. Dla przedstawionego na rysunku 3.13 oczka II prawo Kirchhoffa przyjmuje postać:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4. \quad (3.52)$$



Rysunek 3.14:



Rysunek 3.15:

Na podstawie praw Kirchhoffa można łatwo otrzymać wzory, określające wypadkowy opór przewodników, połączonych ze sobą szeregowo (rys. 3.14):

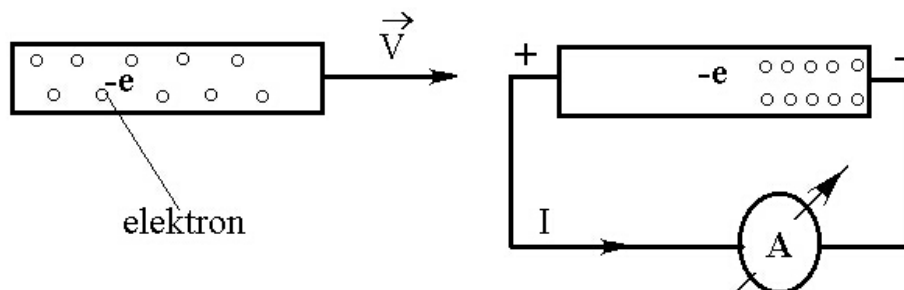
$$R = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (3.53)$$

lub równoległe (rys. 3.15):

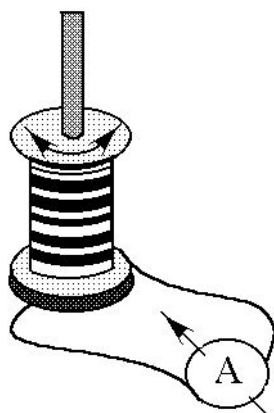
$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (3.54)$$

3.4 Klasyczna teoria przewodnictwa elektrycznego metali

Przewodnictwo elektryczne większości metali jest związane z obecnością w nich swobodnych elektronów. Jedno z doświadczeń, dowodzących elektronowego charakteru przewodnictwa metali, przeprowadzili w 1917 r. R.C. Tolman i T.D. Stuart. Załóżmy, że metalowy pręt, poruszający się z prędkością v zostanie nagle zahamowany (rys. 3.16). Na skutek bezwładności naładowanych cząstek — nośników ładunku na końcach przewodnika wytworzy



Rysunek 3.16:



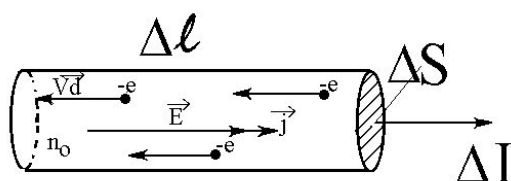
Rysunek 3.17:

się różnica potencjałów, powodująca przepływ prądu. Z kierunku przepływu prądu można określić znak nośników ładunku w przewodniku oraz, jak pokazują obliczenia, stosunek ładunku nośników do ich masy.

Schemat doświadczenia Tolmana i Stuarta pokazuje rysunek 3.17. Szpula z nawiniętym przewodnikiem była wprawiona w szybkie drgania skrętne, co powodowało wytworzenie w obwodzie zmiennego prądu, rejestrowanego przez czuły amperomierz. Doświadczenie to wykazało, że nośniki ładunku w większości metali mają ujemny znak a stosunek ich ładunku do masy jest równy stosunkowi e/m elektronu.

W klasycznej teorii przewodnictwa elektrycznego metali, opracowanej przez P. Drudego w 1900 r. zakłada się, że elektrony w metalu stanowią „gaz elektronowy”, do którego stosuje się zwykłą kinetyczną teorię gazów. Istnienie tych elektronów wynika z dysocjacji części atomów w metalu na elektrony i dodatnie jony. Według współczesnych poglądów elektronami swobodnymi są elektrony walencyjne atomów metalu, najsłabiej związane z atomami. W szczególności, w przypadku metali jednowartościowych, na każdy atom przypada jeden odłączony od niego elektron swobodny.

Znajdziemy obecnie związek między koncentracją n_0 elektronów w przewodniku, średnią prędkością ich dryfu v_d pod wpływem pola elektrycznego



Rysunek 3.18:

a przewodnictwem elektrycznym danego przewodnika. Rozważmy niewielki element przewodnika w kształcie walca, przez który płynie prąd o gęstości \mathbf{j} , wywołany polem elektrycznym o natężeniu \mathbf{E} (rys. 3.18). Natężenie prądu ΔI , przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika ΔS , wyrazić można wzorami:

$$\Delta I = j\Delta S, \quad (3.55)$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{en_0\Delta l\Delta S}{\Delta t}, \quad (3.56)$$

gdzie Δt jest czasem, w którym elektron przebędzie odległość równą długości Δl elementu:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v_d}. \quad (3.57)$$

Ze wzoru (3.56) otrzymuje się wówczas:

$$\Delta I = en_0v_d\Delta S. \quad (3.58)$$

Porównując ten wzór ze wzorem (3.55) otrzymuje się następujące wyrażenie dla gęstości prądu:

$$j = en_0v_d, \quad (3.59)$$

albo, w postaci wektorowej:

$$\mathbf{j} = -en_0\mathbf{v}_d. \quad (3.60)$$

Przedostatni wzór można porównać z mikroskopowym prawem Ohma (3.30), podanym w podrozdziale 3.2:

$$j = \sigma E. \quad (3.61)$$

Ponieważ koncentracja n_0 elektronów w przewodniku nie powinna zależeć od natężenia pola elektrycznego, widać, że prawo Ohma będzie spełnione tylko wtedy, gdy średnia prędkość dryfu elektronu v_d jest proporcjonalna do natężenia pola E ,

$$v_d \sim E. \quad (3.62)$$

Zależność tę pisze się zwykle w postaci:

$$\boxed{v_d = \mu E}, \quad (3.63)$$

gdzie współczynnik μ nazywa się *ruchliwością* elektronu w danym przewodniku. Ruchliwość nośnika ładunku ma wymiar:

$$[\mu] = \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}. \quad (3.64)$$

Podstawiając wyrażenie (3.63) do wzoru (3.59) otrzymujemy:

$$j = en_0\mu E. \quad (3.65)$$

Z porównania tego wzoru ze wzorem (3.61) wynika, że przewodnictwo właściwe przewodnika wyraża się wzorem:

$$\boxed{\sigma = en_0\mu}. \quad (3.66)$$

Jest więc ono proporcjonalne do koncentracji swobodnych elektronów oraz do ich ruchliwości.

Na podstawie ostatniego wzoru można, znając przewodnictwo elektryczne określonego metalu, oszacować ruchliwość występujących w nim swobodnych elektronów. Przeprowadzimy takie obliczenia dla sodu, którego przewodnictwo elektryczne w temperaturze pokojowej ($T \approx 300$ K) wynosi $\sigma \approx 2,4 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$. Przyjmując, że na każdy atom sodu przypada jeden swobodny elektron, koncentrację swobodnych elektronów można określić ze wzoru:

$$n_0 = \frac{N_A \rho'}{\mu'}, \quad (3.67)$$

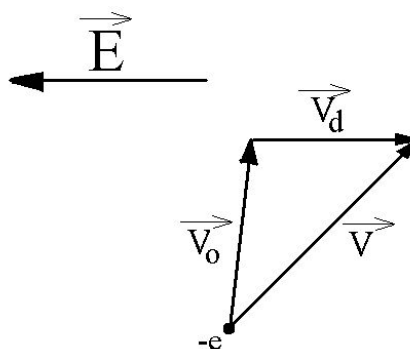
gdzie N_A oznacza liczbę Avogadro ($N_A \approx 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$), ρ' — gęstość sodu, $\rho' = 0,971 \text{ g/cm}^3$ a μ' — masę jednego mola sodu, $\mu' \approx 23 \text{ g/mol}$. W rezultacie otrzymuje się koncentrację elektronów $n_0 \approx 2,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Obliczona ze wzoru (3.66) ruchliwość elektronów

$$\mu = \frac{\sigma}{en_0} \quad (3.68)$$

w przypadku sodu wynosi $\mu \approx 60 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$. Jeżeli w tym przewodniku wytworzyć np. pole elektryczne $E = 1 \text{ V/cm}$, to prędkość dryfu elektronów będzie równa $v_d \approx 60 \text{ cm/s}$.

Rozpatrzmy teraz bardziej szczegółowo mechanizm transportu elektronów w metalach. Należy zwrócić uwagę na dwa fakty. Po pierwsze, proporcjonalność średniej prędkości dryfu v_d elektronów do natężenia pola E (wzór (3.63)) wykazuje, że na elektrony w metalu działają siły oporu, proporcjonalne do ich prędkości. Przy ich braku ruch elektronów w stałym polu elektrycznym byłby jednostajnie przyspieszony. Źródłem wspomnianych sił oporu jest rozproszenie elektronów na zjonizowanych atomach metalu, przy czym stracona w procesach rozpraszania energia elektronów zamienia się w energię cieplną. Po drugie, średnia prędkość ruchu cieplnego elektronów, oszacowana na podstawie kinetycznej teorii gazów:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (3.69)$$



Rysunek 3.19:

(k — stała Boltzmanna, $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K, m — masa elektronu, $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg), jest znacznie większa od prędkości dryfu elektronów w polu elektrycznym. Dla temperatury pokojowej, $T \approx 300$ K, z powyższego wzoru otrzymuje się $v_0 \approx 1,1 \cdot 10^7$ cm/s, a więc istotnie $v_d \ll v_0$.

Ruch elektronów w metalu, wewnątrz którego istnieje pole elektryczne, można więc traktować jako wypadkową chaotycznego ruchu cieplnego elektronów, nie powodującego przepływu prądu elektrycznego, oraz uporządkowanego ruchu elektronów pod działaniem pola elektrycznego. Ze względu na zależność $v_d \ll v_0$ można przyjąć, że wypadkowa prędkość elektronu $v \approx v_0$ (rys. 3.19). W rezultacie średni czas τ między kolejnymi zderzeniami elektronów z jonami metalu (tzw. średni czas relaksacji) i średnia droga swobodna λ elektronu nie zależą od natężenia zewnętrznego pola.

Obliczymy obecnie średnią prędkość dryfu elektronu przy założeniu, że w procesie rozproszenia elektron traci całą energię uzyskaną uprzednio w zewnętrznym polu elektrycznym. Ponieważ siłę działającą na elektron można wyrazić wzorami:

$$F = eE, \quad (3.70)$$

$$F = ma, \quad (3.71)$$

(m i a — masa i przyspieszenie elektronu), jego przyspieszenie między kolejnymi zderzeniami jest równe:

$$a = \frac{eE}{m}. \quad (3.72)$$

Średnia prędkość dryfu elektronu jest więc w przybliżeniu równa:

$$v_d \approx a\tau = \frac{eE\tau}{m}, \quad (3.73)$$

gdzie τ jest średnim czasem relaksacji. W niektórych podręcznikach powyższy wzór pisze się z dodatkowym czynnikiem „ $\frac{1}{2}$ ”, ponieważ prędkość określona tym wzorem ma odpowiadać średniej wartości prędkości dryfu elektronu,

która zmienia się od zera do wartości $a\tau$. Jeżeli jednak uwzględnić rozrzut czasów między kolejnymi zderzeniami elektronu z jonami metalu, otrzymuje się ostatni wzór, bez czynnika „ $\frac{1}{2}$ ”. Porównując ten wzór ze wzorem (3.63), otrzymuje się następujące wyrażenie dla ruchliwości elektronu:

$$\boxed{\mu = \frac{e\tau}{m}}. \quad (3.74)$$

Korzystając z wyznaczonej poprzednio wartości ruchliwości elektronu dla sodu, można teraz oszacować średni czas relaksacji i średnią drogę swobodną elektronu w tym metalu. Przekształcając ostatni wzór otrzymujemy wyrażenie:

$$\tau = \frac{\mu m}{e}, \quad (3.75)$$

które po podstawieniu odpowiednich wartości za μ , e oraz masę elektronu m daje $\tau \approx 3,4 \cdot 10^{-14}$ s. Z makroskopowego punktu widzenia średni czas relaksacji elektronów w metalach jest więc bardzo krótki, co tłumaczy niewielką prędkość dryfu elektronów pod wpływem pola elektrycznego. Przytoczona wartość czasu relaksacji jest jednak stosunkowo duża w skali mikroskopowej. Świadczy o tym znaczna wartość średniej drogi swobodnej elektronu w metalach, obliczona z zależności:

$$\lambda = v_0\tau \quad (3.76)$$

(v_0 — prędkość termiczna elektronów). Dla sodu otrzymuje się wartość $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-7}$ cm, większą około 10 razy od odległości między sąsiednimi jonami w metalu, równej $d \approx 3,4 \cdot 10^{-8}$ cm. Taka duża wartość średniej drogi swobodnej elektronów w metalach jest trudna do wyjaśnienia w ramach klasycznej teorii przewodnictwa elektrycznego, tłumaczy ją dopiero teoria kwantowa.

