

Władysław Tomaszewicz — Przemysław Ciesielski

Elektryczność i magnetyzm

(na prawach rękopisu)

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska 2002

Wstęp

Przedmiotem wykładu jest *elektrodynamika klasyczna*. Zajmuje się ona ładunkami elektrycznymi, prądami elektrycznymi oraz ich oddziaływaniami za pośrednictwem pól elektrycznych i magnetycznych. Elektrodynamika klasyczna wyjaśnia ogromną liczbę doświadczeń z zakresu elektryczności i magnetyzmu i stanowi podstawę zastosowań zjawisk elektromagnetycznych w takich dziedzinach jak elektrotechnika, elektronika czy radiotechnika. Prawa klasycznej elektrodynamiki zostały sformułowane w ostatecznej postaci w XIX w., w wyniku prac wielu uczonych, jak m.in. A. Ampère, M. Faraday, J. C. Maxwell.

Zakres stosowalności elektrodynamiki klasycznej jest mimo wszystko ograniczony. Przede wszystkim nie uwzględnia ona efektów kwantowych. Wiadomo np., że promieniowanie elektromagnetyczne ma nieciągłą strukturę — składa się z kwantów energii zwanych fotonami. Energia pojedynczego fotonu wyraża się wzorem $E_f = h\nu$ (h — stała Plancka, ν — częstotliwość promieniowania). To skwantowanie energii promieniowania opisuje elektrodynamika kwantowa. Elektrodynamika i mechanika klasyczna nie są też w stanie wyjaśnić wielu elektrycznych i magnetycznych własności substancji materialnych. Jest to zrozumiałe, ponieważ poprawny opis własności atomów i cząsteczek daje dopiero mechanika kwantowa. W obecnym wykładzie zagadnienia te będą więc z konieczności omawiane w uproszczony sposób.

Elektrodynamika klasyczna jest teorią zgodną ze szczególną teorią względności — jest teorią relatywistyczną. Historycznie rzecz biorąc, transformację Lorentza wyprowadzono po raz pierwszy na podstawie analizy równań elektrodynamiki Maxwella.

W nauce o elektromagnetyźmie używa się obecnie kilku różnych układów jednostek. Problem wyboru określonego układu jednostek jest bardzo istotny, ponieważ zależy od niego postać równań elektromagnetyzmu. W obecnym wykładzie będzie stosowany tzw. zracjonalizowany układ MKSA, będący „podzbiorem” układu SI, oparty na czterech wielkościach podstawowych (tabela 1). Określenie trzech pierwszych jednostek podstawowych powinno być znane z mechaniki, definicję jednostki natężenia prądu — ampera podamy nieco później.

Wielkość podst.	Jedn. podst.	Ozn. j. p.
długość	metr	m
masa	kilogram	kg
czas	sekunda	s
natęż. prądu el.	amper	A

Tabela 1:

Rozdział 1

Elektrostatyka

1.1 Ładunek elektryczny. Przewodniki i izolatory. Prawo zachowania ładunku

Elektrostatyka jest częścią elektrodynamiki, rozpatrującą zjawiska związane z oddziaływaniem ładunków elektrycznych w stanie spoczynku. W tym rozdziale będziemy rozpatrywać oddziaływanie ładunków elektrycznych w próżni (oddziaływanie ładunków w powietrzu i innych gazach jest niemal identyczne). Od dawna było wiadomo, że przez potarcie niektórych ciał można je naelektryzować — „wytworzyć” na nich ładunek elektryczny. Jeżeli dwie pałeczki szklane potarte jedwabiem zbliżymy do siebie, będą się one odpychać. Tak samo będą się odpychać dwie pałeczki ebonitowe potarte futrem. Natomiast potarte pałeczki — szklana i ebonitowa będą się przyciągać. Fakty te tłumaczymy, zakładając, że przez potarcie gromadzą się na pałeczkach ładunki elektryczne, które oddziałują na siebie określonymi siłami. Z różnych kierunków działania sił wynika, że ładunki szkła i ebonitu różnią się od siebie. Umówiono się nazywać ładunki, które gromadzą się na potartym szkłe dodatnimi a gromadzące się na potartym ebonicie — ujemnymi. Można więc stwierdzić, że ładunki jednoimienne (jednego znaku) odpychają się a ładunki różnoimienne (różnych znaków) przyciągają się. Zjawisko elektryzowania przez potarcie obserwuje się dla wielu ciał. Porównując ładunek danego ciała z ładunkiem nagromadzonym na szkłe lub ebonicie można ustalić jego znak.

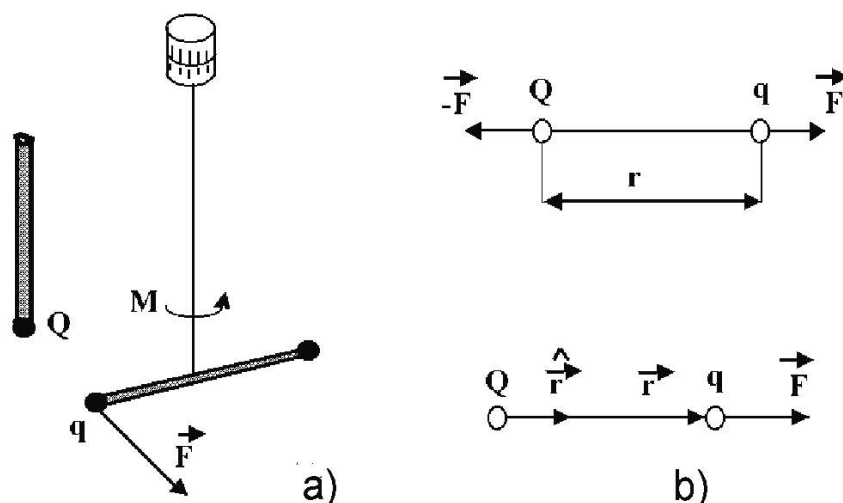
Przez pocieranie wełną pręta metalowego, trzymanego w ręku, nie można go naelektryzować. Można natomiast naelektryzować w ten sposób pręt metalowy, zamocowany na szklanej lub ebonitowej podstawie. Dla wyjaśnienia tego zjawiska przyjmujemy, że metale, ciało ludzkie i ziemia są dobrymi przewodnikami ładunku elektrycznego — ładunki mogą się w nich przemieszczać. Natomiast szkło, ebonit i większość innych tworzyw sztucznych są złymi przewodnikami ładunku elektrycznego, zwanymi izolatorami lub dielektrykami.

Zjawisko elektryzowania przez potarcie tłumaczymy zakładając, że cia-

ło nienaektryzowane zawiera równe ilości ładunku dodatniego i ujemnego. Podczas pocierania dwóch ciał część ładunku przechodzi z jednego ciała do drugiego i oba ciała elektryzują się. Ciało można naelektryzować również przez połączenie go przewodnikiem z innym naelektryzowanym ciałem. Jest też możliwe naelektryzowanie ciała przez indukcję. Jeżeli do przewodnika zbliżymy naelektryzowane ciało, w przewodniku nastąpi rozdzielenie ładunków obu znaków. Przy podzieleniu przewodnika na dwie części obie zostaną naładowane. Po zetknięciu obu części przewodnika stanie się on znów obojętny. Omówione doświadczenia pozwalają sformułować *zasadę zachowania ładunku*: całkowity ładunek układu odosobnionego, tzn. suma algebraiczna ładunków dodatnich i ujemnych nie ulega zmianie. Do badania naelektryzowania ciał służy prosty przyrząd, zwany elektroskopem.

1.2 Prawo Coulomba. Jednostka ładunku. Gęstość ładunku

Na podstawie prostych doświadczeń można stwierdzić, że siła oddziaływania dwóch ładunków rośnie ze wzrostem ich wielkości i ze zmniejszaniem się odległości między nimi. Prawo oddziaływania ładunków punktowych ustalił w 1785 r. Ch. Coulomb za pomocą wagi skręceń (rys. 1.1a). W czasach Coulomba nie znano jeszcze żadnej metody pomiaru ładunku elektrycznego. Coulomb w swoim doświadczeniu wykorzystał następujący fakt: jeżeli naładowaną przewodzącą kulkę zetkniemy z identyczną, nienaładowaną kulką, to ładunek każdej z nich stanie się połową ładunku wyjściowego. Ładunek kulki można w ten sposób zmniejszyć 2-krotnie, 4-krotnie itd. Określone



Rysunek 1.1:

przez Coulomba prawo oddziaływania ładunków elektrycznych jest analogiczne do prawa grawitacji Newtona. *Dwa ładunki punktowe oddziałują na siebie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich wielkości a odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi.* Kierunek działania siły leży na prostej łączącej ładunki przy czym siły działające na każdy z ładunków mają jednakową wartość bezwzględną i przeciwne zwroty, zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona (rys. 1.1b).

Prawo Coulomba można wyrazić wzorem:

$$F = k \frac{qQ}{r^2}, \quad (1.1)$$

gdzie k jest stałą proporcjonalności. Wprowadzając wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ dla wskazania kierunku siły, prawo Coulomba można zapisać w postaci (por. rys. 1.1b):

$$\mathbf{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.2)$$

Prawo Coulomba umożliwia zdefiniowanie jednostki ładunku elektrycznego. W układzie MKSA jednostkę ładunku wyprowadza się jednak z jednostki natężenia prądu. Przez prąd elektryczny rozumiemy przepływ ładunku elektrycznego przez przewodnik. Natężenie prądu elektrycznego I jest to stosunek ładunku elektrycznego Δq przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika, do czasu jego przepływu Δt ,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Ścisłejsze określenie natężenia prądu ma postać:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (1.4)$$

Otrzymujemy stąd:

$$dq = I dt, \quad (1.5)$$

$$q = \int_0^t I dt'. \quad (1.6)$$

Jednostką natężenia prądu jest amper: $[I] = \text{A}$ a jednostkę ładunku elektrycznego nazywamy kulombem (C): $[q] = \text{C} = \text{A}\cdot\text{s}$. Jeden kulomb jest to więc ładunek, który przepływa w ciągu jednej sekundy przez przekrój poprzeczny przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu jednego ampera.

Znając jednostkę ładunku elektrycznego i mierząc siłę oddziaływania dwóch ładunków umieszczonych w danej odległości można ustalić wartość

współczynnika proporcjonalności k w prawie Coulomba. Jest on w przybliżeniu równy:

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}. \quad (1.7)$$

W zracjonalizowanym układzie jednostek MKSA współczynnik k zapisuje się jako:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.8)$$

gdzie ϵ_0 nazywa się stałą dielektryczną lub przenikalnością dielektryczną próżni. Nazwa ta jest myląca, ponieważ ϵ_0 jest po prostu stałą zależną od wyboru jednostki ładunku elektrycznego. Wartość tej stałej wynosi:

$$\epsilon_0 = 8,85418 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}. \quad (1.9)$$

Prawo Coulomba możemy więc zapisać w postaci:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.10)$$

lub wektorowo, jako:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}}. \quad (1.11)$$

Należy zauważyć, że kulomb jest bardzo dużą jednostką ładunku. Dwa ładunki o wartości 1 C oddziałują na siebie z odległości jednego metra siłą $9 \cdot 10^9$ N! W doświadczeniach z elektryzowaniem ciał mamy zwykle do czynienia z ładunkiem rzędu 1 nC = 10^{-9} C.

Załóżmy teraz, że mamy większą liczbę ładunków Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, oddziałujących z ładunkiem q (rys. 1.2). Z doświadczenia wiadomo, że siła oddziaływania między dwoma ładunkami nie zależy od obecności innych ładunków. Siła \mathbf{F} działająca na dany ładunek q jest więc wypadkową sił pochodzących od poszczególnych ładunków:

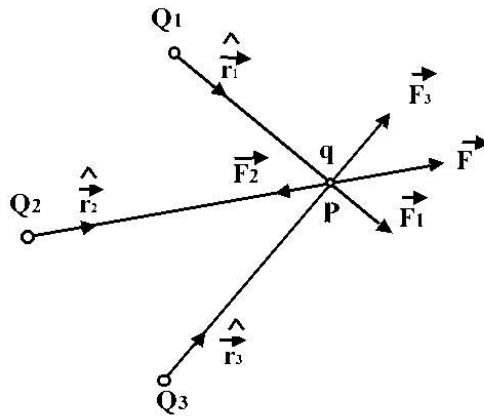
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (1.12)$$

Ponieważ siła działająca między ładunkami q i Q_i wynosi:

$$\mathbf{F}_i = \frac{qQ_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i, \quad (1.13)$$

całkowita siła działająca na ładunek q jest równa:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (1.14)$$



Rysunek 1.2:

Dotychczas rozpatrywaliśmy oddziaływanie ładunków punktowych tj. zakładaliśmy, że rozmiary ciał, na których zgromadzone są ładunki, można zaniedbać w porównaniu z odległościami między nimi. Gdy rozmiary ciał są duże, wygodne jest wprowadzenie pojęcia gęstości ładunku. Jeżeli ładunek jest rozmieszczony na przewodniku liniowym (rys. 1.3) to przez liniową gęstość ładunku rozumiemy wielkość:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}. \quad (1.15)$$

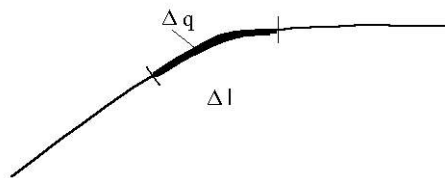
o wymiarze $[\lambda] = \text{C/m}$.

Analogicznie, jeśli ładunek jest rozmieszczony na pewnej powierzchni (rys. 1.4) przez powierzchniową gęstość ładunku rozumiemy:

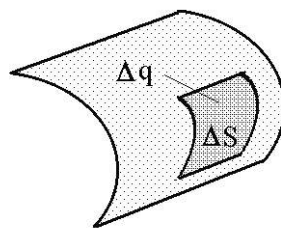
$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \quad (1.16)$$

o wymiarze $[\sigma] = \text{C/m}^2$.

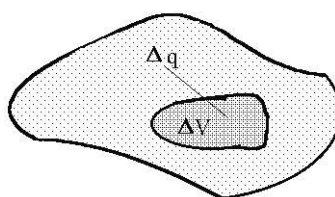
W przypadku objętościowego rozkładu ładunku (rys. 1.5) objętościową



Rysunek 1.3:



Rysunek 1.4:



Rysunek 1.5:

gęstość ładunku definiujemy jako:

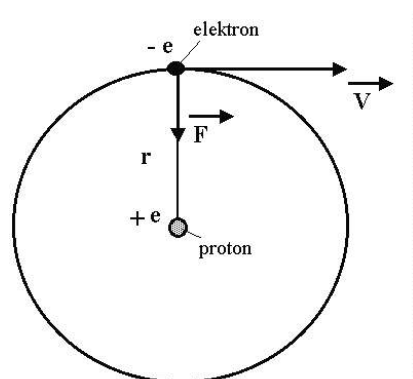
$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad (1.17)$$

której wymiar $[\varrho] = \text{C}/\text{m}^3$. W celu znalezienia siły działającej na dany ładunek ze strony ładunków rozłożonych w sposób ciągły należy dodać siły pochodzące od poszczególnych elementów naładowanego ciała, tj. wykonać odpowiednie całkowanie po długości, powierzchni lub objętości ciała.

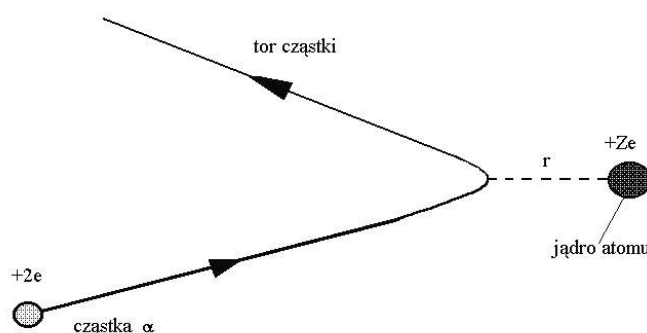
1.3 Zakres stosowalności prawa Coulomba. Ładunek elementarny

Słuszność prawa Coulomba można bezpośrednio sprawdzić doświadczalnie dla odległości rzędu centymetrów lub metrów. Jednakże siły oddziaływania elektrostatycznego występują m.in. w atomach i cząsteczkach, których rozmiary są rzędu $r \approx 10^{-10}$ m oraz w jądrach atomowych o rozmiarach rzędu $r \approx 10^{-15}$ m. Powstaje więc pytanie, czy prawo Coulomba jest dokładnie spełnione dla tak małych odległości między ładunkami. Przytoczymy kilka argumentów na rzecz stosowalności prawa Coulomba w tych warunkach.

W przypadku atomu wodoru siła oddziaływania elektronu z jądrem jest zwykłą siłą elektrostatyczną (rys 1.6). Obliczenia dozwolonych wartości energii elektronu na podstawie mechaniki kwantowej i ich porównanie z wartościami doświadczalnymi pozwalają stwierdzić słuszność prawa Coulomba z



Rysunek 1.6:

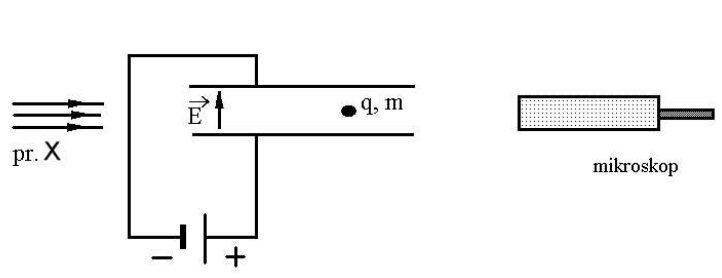


Rysunek 1.7:

dużą dokładnością. Jeżeli przyjąć, że siła oddziaływania elektrostatycznego nie spełnia dokładnie prawa Coulomba, $F \sim r^{-2 \pm \varepsilon}$ (ε — mała liczba), to wyniki wspomnianych obliczeń świadczą, że $\varepsilon < 10^{-9}$.

W doświadczeniach E. Rutherforda i współpracowników (1909 - 1911), które doprowadziły do odkrycia jądra atomowego, badano rozpraszanie cząstek α , przechodzących przez cienkie folie metalowe (rys 1.7). Zjawisko to można traktować jako rozproszenie cząstki α na jądrze pojedynczego atomu, w wyniku ich oddziaływania elektrostatycznego. W doświadczeniach tych minimalna odległość między cząstką α i jądrem była rzędu $r \approx 10^{-14}$ m. Ponieważ wyliczone teoretycznie prawdopodobieństwo rozproszenia cząstki α pod danym kątem było zgodne z otrzymanym w doświadczeniach, można stwierdzić, że prawo Coulomba jest, przynajmniej w przybliżeniu, słuszne dla tak małych odległości. Wspomnijmy jeszcze, że elektrodynamika kwantowa przewiduje niewielkie odstępstwa od prawa Coulomba dla odległości $r \lesssim 10^{-12}$ m.

W elektrodynamice klasycznej ładunek elektryczny traktuje się jako wielkość ciągłą, mogącą przybierać dowolnie małe wartości. W rzeczywistości,



Rysunek 1.8:

ładunek elektryczny jest zawsze wielokrotnością (ze znakiem „+” lub „-”) pewnego niewielkiego ładunku, zwanego *ładunkiem elementarnym*. Istnienie ładunku elementarnego wykazał po raz pierwszy R. Millikan w doświadczeniach przeprowadzonych w latach 1909 - 1914. Zasadę jego metody pokazuje rysunek 1.8. Między płytkami kondensatora znajduje się mała kropelka oliwy o promieniu r . W wyniku działania jonizującego promieni X kropelka uzyskuje pewien ładunek q . W nieobecności pola elektrycznego kropelka opada ruchem jednostajnym z prędkością v_1 (rys. 1.9). Między siłą ciężkości P , siłą wyporu W i siłą oporu powietrza F_1 , działającymi na kropelkę, zachodzi związek:

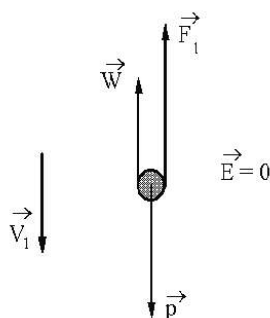
$$F_1 = P - W. \quad (1.18)$$

Ponieważ:

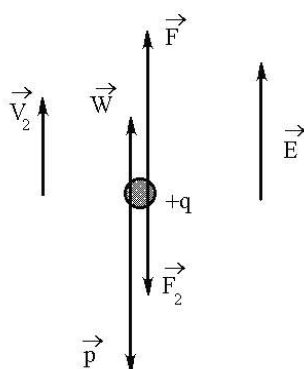
$$F_1 = 6\pi\eta v_1 r \quad (1.19)$$

(prawo Stokesa),

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad (1.20)$$



Rysunek 1.9:



Rysunek 1.10:

$$W = V \varrho' g = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho' g, \quad (1.21)$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości powietrza, ϱ i ϱ' — gęstością oliwy i powietrza, g - przyspieszeniem ziemskim, więc:

$$6\pi\eta v_1 r = \frac{4}{3} \pi r^3 (\varrho - \varrho') g. \quad (1.22)$$

Z ostatniego równania można wyliczyć promień kropelki:

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v_1}{2(\varrho - \varrho') g}}. \quad (1.23)$$

Po włączeniu pola elektrycznego kropelka porusza się (np. do góry) z prędkością v_2 (rys. 1.10). Oznaczając siłę elektrostatyczną, działającą na ładunek q kropelki, przez F , otrzymujemy:

$$F - F_2 = P - W = F_1. \quad (1.24)$$

Ponieważ:

$$F = qE \quad (1.25)$$

(E - natężenie pola),

$$F_2 = 6\pi\eta v_2 r, \quad (1.26)$$

więc:

$$qE - 6\pi\eta v_2 r = 6\pi\eta v_1 r. \quad (1.27)$$

Ładunek q kropelki można więc obliczyć ze wzoru:

$$q = \frac{6\pi\eta(v_1 + v_2)r}{E}. \quad (1.28)$$

Pomiary Millikana wykazały, że ładunek kropelki jest zawsze wielokrotnością ładunku elementarnego e , $q = \pm ne$ (n — liczba całkowita). Wg współczesnych pomiarów wartość ładunku elementarnego wynosi:

$$e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (1.29)$$

Ze względu na małą wartość ładunku elementarnego w doświadczeniach z elektryzowaniem ciał nie można stwierdzić nieciągłego charakteru ładunku elektrycznego. Większość naładowanych cząstek elementarnych posiada ładunek, równy co do wartości bezwzględnej ładunkowi elementarnemu. Np. ładunek elektronu $q = -e$, ładunek protonu i pozytonu $q = +e$.

Dokładność wyznaczenia ładunku elementarnego jest stosunkowo niewielka. Można natomiast stwierdzić z bardzo dużą dokładnością równość bezwzględnej wartości ładunków niektórych cząstek elementarnych np. elektronu i protonu. Każdy niezjonizowany atom składa się z jądra atomowego, zawierającego Z protonów (Z - liczba atomowa) o łącznym ładunku $q = +Ze$, oraz z Z elektronów o ładunku $-e$ każdy. Badając ewentualne odchylenie wiązki poruszających się atomów w silnym polu elektrycznym można stwierdzić, że atomy są cząstkami o zerowym ładunku całkowitym. Przykładem takiego pomiaru jest doświadczenie J. C. Zorna, G. E. Chamberleina i V. W. Hughesa z 1963 r., przeprowadzone z wiązką atomów cezu. Pozwoliło ono stwierdzić, że ew. ładunek atomu cezu nie przekracza wartości $10^{-16}e$ a więc ew. różnica wartości bezwzględnych ładunku elektronu i protonu jest mniejsza niż $2 \cdot 10^{-18}e$ (liczba atomowa cezu $Z = 55$). Należy zauważyć, że współczesna teoria cząstek elementarnych nie tłumaczy samego faktu skwantowania ładunku elektrycznego, wartości ładunku elementarnego jak i równości (z dokładnością co do znaku) ładunków różnych cząstek elementarnych.

1.4 Pole elektrostatyczne. Natężenie i linie sił pola

Analogicznie do pojęcia pola grawitacyjnego można wprowadzić pojęcie *pola elektrostatycznego* (w ogólnym przypadku pola zmiennego w czasie — *pola elektrycznego*). Zamiast uważać, że dwa ładunki oddziałują na siebie bezpośrednio siłami elektrostatycznymi z pewnej odległości można przyjąć, że jeden z tych ładunków wytwarza wokół siebie pole elektryczne. Jeżeli w polu tym umieścimy inny ładunek (nazywany próbnym), będzie na niego działać siła pochodząca od pola elektrycznego. Przyjmujemy, że pole elektryczne istnieje wokół danego ładunku nawet gdy nie ma ładunków próbnych umożliwiających jego wykrycie. Zgodnie z powyższym uważamy, że ładunki oddziałują ze sobą nie bezpośrednio:

$$\text{ładunek 1} \rightleftharpoons \text{ładunek 2}$$

ale za pośrednictwem pola elektrycznego:

ładunek 1 \Leftrightarrow pole elektryczne \Leftrightarrow ładunek 2.

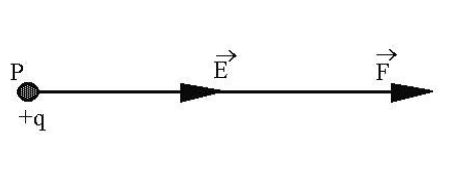
Konieczności wprowadzenia pojęcia pola elektrycznego nie można uzasadnić w ramach elektrostatyki, jest ona natomiast oczywista w przypadku, gdy ładunki elektryczne poruszają się. Wyobraźmy sobie np. że mamy dwa ładunki umieszczone w dużej odległości od siebie i nagle zmieniamy nieznacznie położenie jednego z nich. Zgodnie z założeniem o bezpośrednim oddziaływaniu ładunków siła działająca na drugi ładunek powinna natychmiast ulec zmianie. Jednak, jak wynika ze szczególnej teorii względności, maksymalna prędkość rozchodzenia się dowolnego oddziaływania nie przekracza prędkości światła c . Zatem zgodnie ze szczególną teorią względności, siła oddziaływująca na drugi ładunek zmieni się nie wcześniej, niż po czasie $\Delta t = x/c$ (x — odległość ładunków). Czas Δt jest to czas przemieszczenia się zaburzenia pola elektrycznego między ładunkami.

Dla scharakteryzowania pola elektrycznego wprowadza się pojęcie *wektora natężenia pola* \mathbf{E} (rys. 1.11). Liczbowo natężenie pola elektrostatycznego jest równe stosunkowi siły, działającej na ładunek próbny do wielkości tego ładunku. Ponieważ, zgodnie z prawem Coulomba, działająca siła jest proporcjonalna do wielkości ładunku próbnego, natężenie pola nie zależy od wielkości tego ładunku. Zwrot wektora natężenia pola przyjmujemy za zgodny ze zwrotem siły, działającej na ładunek dodatni. Wobec tego:

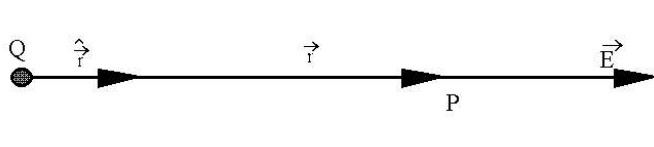
$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}} \quad (1.30)$$

a wymiarem natężenia pola elektrycznego jest:

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$



Rysunek 1.11:



Rysunek 1.12:

W przypadku pola wytworzonego przez ładunek punktowy Q (rys. 1.12) siła działająca na ładunek próbny q wynosi:

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.31)$$

Natężenie pola jest więc równe:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.32)$$

Jeżeli pole elektryczne jest wytworzone przez n ładunków punktowych Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, siła działająca na ładunek próbny q jest wypadkową sił pochodzących od poszczególnych ładunków (por. rys. 1.2):

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (1.33)$$

Siłę \mathbf{F}_i , działającą na ładunek próbny ze strony ładunku Q_i i wypadkową \mathbf{F} tych sił można zapisać jako:

$$\mathbf{F}_i = q\mathbf{E}_i, \quad (1.34)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.35)$$

gdzie \mathbf{E}_i — natężenie pola ładunku Q_i , \mathbf{E} — wypadkowe natężenie pola. Z powyższych wzorów wynika, że:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i, \quad (1.36)$$

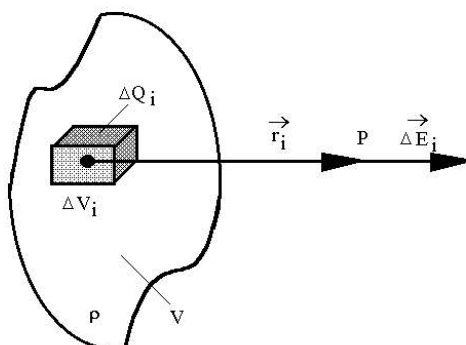
co oznacza, że natężenia pól poszczególnych ładunków dodają się wektorowo. Stwierdzenie to nazywa się *zasadą superpozycji pól elektrycznych*. Ponieważ natężenie pola i -tego ładunku wynosi:

$$\mathbf{E}_i = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i, \quad (1.37)$$

wypadkowe natężenie pola ładunków punktowych wyraża się wzorem:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (1.38)$$

Należy zauważyć, że słuszność zasady superpozycji pól elektrycznych nie jest oczywista. Można wyobrazić sobie, że pole elektryczne danego ładunku mogłoby ulec zmianie pod wpływem pól elektrycznych innych ładunków.



Rysunek 1.13:

W istocie, elektrodynamika kwantowa przewiduje istnienie nieznaczących odstępstw od zasady superpozycji, powodujących np. wzajemne rozpraszanie dwóch fal elektromagnetycznych.

W podobny sposób można obliczyć natężenie pola elektrycznego, pochodzącego od ładunku elektrycznego rozłożonego w ciągły sposób. Niech np. ładunek będzie rozmieszczony z gęstością objętościową ρ w danym ciele (rys. 1.13). W celu obliczenia natężenia pola dzielimy ciało na niewielkie części o objętości ΔV_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Natężenie pola pochodzące od i -tej części ciała wynosi:

$$\Delta \mathbf{E}_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (1.39)$$

Ale, z definicji gęstości objętościowej ładunku:

$$\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i, \quad (1.40)$$

skąd:

$$\Delta \mathbf{E}_i = \frac{\rho_i \hat{\mathbf{r}}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \Delta V_i. \quad (1.41)$$

Całkowite natężenie pola wynosi więc w przybliżeniu:

$$\mathbf{E} \approx \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} \Delta V_i. \quad (1.42)$$

W celu otrzymania dokładnej wartości natężenia pola należy w ostatnim wyrażeniu dokonać przejścia granicznego, zakładając że $n \rightarrow \infty$ oraz, że $\Delta V_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zgodnie z definicją całki objętościowej otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} \Delta V_i = \int_V \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV. \quad (1.43)$$

Natężenie pola ładunku objętościowego jest więc równe:

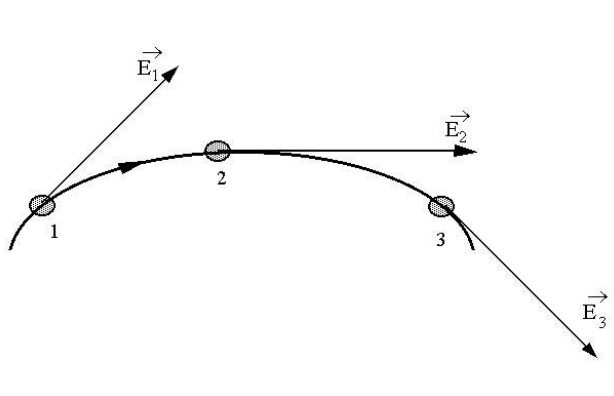
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV. \quad (1.44)$$

Podobne wzory otrzymuje się w przypadku liniowego lub powierzchniowego rozkładu ładunku. Wystarczy w ostatnim wzorze dokonać następujących zmian:

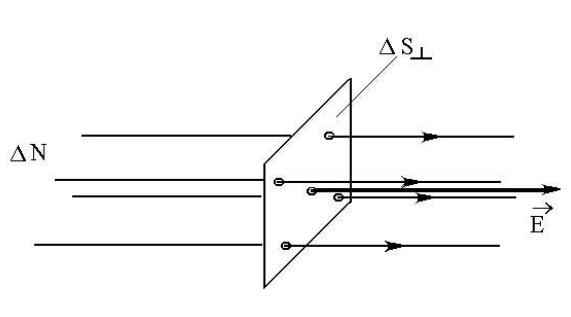
$$\begin{aligned} \text{ładunek liniowy:} & \quad \rho \rightarrow \lambda, \quad dV \rightarrow dl, \quad V \rightarrow C, \\ \text{ładunek powierzchniowy:} & \quad \rho \rightarrow \sigma, \quad dV \rightarrow dS, \quad V \rightarrow S. \end{aligned}$$

W celu graficznego przedstawienia pola elektrycznego wprowadza się pojęcie *linii sił pola*. W każdym punkcie przestrzeni linie sił mają kierunek styczny do wektora natężenia pola i zgodny z nim zwrot (rys. 1.14). Przyjmuje się dodatkowo, że liczba linii ΔN , przechodzących przez niewielką powierzchnię ΔS_{\perp} , prostopadłą do wektora natężenia pola \mathbf{E} , jest proporcjonalna do wielkości $E\Delta S_{\perp}$ (rys. 1.15):

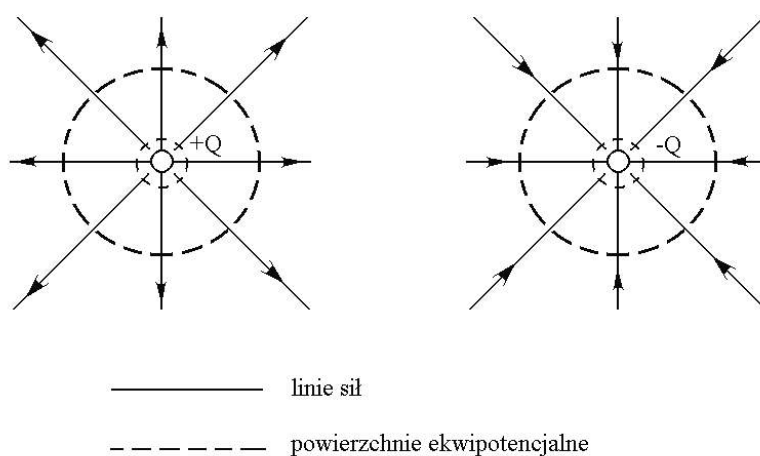
$$\Delta N \sim E\Delta S_{\perp}. \quad (1.45)$$



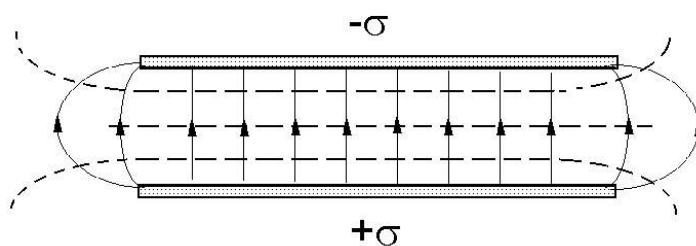
Rysunek 1.14:



Rysunek 1.15:



Rysunek 1.16:



Rysunek 1.17:

Linie sił ładunków punktowych — dodatniego i ujemnego pokazuje rysunek 1.16.

Jeżeli natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze przestrzeni ma stałą wartość i kierunek, nazywamy je *polem jednorodnym*. Linie sił pola jednorodnego są równoległe i równo oddalone od siebie. Pole jednorodne powstaje między dwoma równoległymi płaszczyznami, naładowanymi ze stałą gęstością powierzchniową ładunkami o przeciwnych znakach (rys. 1.17).

Linii sił pola elektrycznego nie należy utożsamiać z torami ruchu naładowanych cząstek w polu elektrycznym, nawet gdy początkowa prędkość cząstek jest równa zero. Tor ruchu ciała ma tę własność, że w każdym punkcie wzdłuż stycznej do niego skierowana jest prędkość ciała. Natomiast wzdłuż stycznej do linii siły skierowana jest siła działająca na naładowane ciało a więc i przyspieszenie, z jakim się ono porusza. Naładowane cząstki mogą się poruszać wzdłuż linii sił pola elektrycznego, gdy te ostatnie są prostoliniowe oraz, gdy prędkości początkowe cząstek są równe zero, lub są skierowane wzdłuż linii sił.

1.5 Strumień pola elektrostatycznego. Prawo Gaussa

W przypadku ciągłego rozkładu ładunku elektrycznego obliczenie wypadkowego pola elektrycznego wymaga całkowania po elementach naładowanego ciała. Zadanie obliczenia pola elektrycznego można niekiedy rozwiązać w inny sposób, korzystając z tzw. prawa Gaussa. Prawo to można traktować jako jedno z podstawowych praw elektrostatyki, zastępujące (w części) prawo Coulomba.

Dla sformułowania prawa Gaussa wprowadzimy teraz pojęcie *strumienia pola elektrostatycznego*. Załóżmy, że mamy niewielką powierzchnię ΔS , umieszczoną w polu elektrycznym o natężeniu \mathbf{E} , przy czym prostopadła do powierzchni tworzy z kierunkiem pola kąt α (rys. 1.18). Przez strumień pola elektrostatycznego $\Delta\Phi_E$ przez powierzchnię ΔS rozumiemy wyrażenie:

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S_{\perp} = E\Delta S \cos \alpha, \quad (1.46)$$

gdzie ΔS_{\perp} jest polem rzutu powierzchni ΔS na płaszczyznę prostopadłą do wektora natężenia pola \mathbf{E} . Wygodnie jest przypisać rozpatrywanej powierzchni prostopadły do niej wektor $\mathbf{\Delta S}$, którego długość jest równa polu powierzchni:

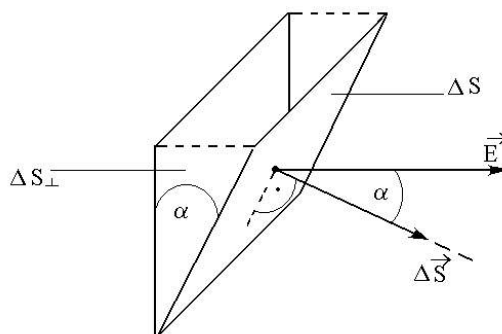
$$|\mathbf{\Delta S}| = \Delta S. \quad (1.47)$$

Zwrot wektora $\mathbf{\Delta S}$ obieramy w dowolny sposób. Należy jednak zauważyć, że znak strumienia pola zależy od zwrotu wektora $\mathbf{\Delta S}$. Strumień pola elektrycznego można więc zapisać jako:

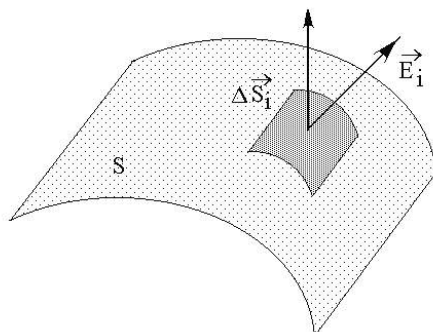
$$\boxed{\Delta\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Delta S}}. \quad (1.48)$$

Jego wymiarem jest:

$$[\Phi_E] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}. \quad (1.49)$$



Rysunek 1.18:



Rysunek 1.19:

Zauważmy, że z przyjętej konwencji przedstawienia linii sił pola elektrycznego wynika, że:

$$\Delta\Phi_E \sim \Delta N, \quad (1.50)$$

gdzie ΔN jest liczbą linii sił przechodzących przez daną powierzchnię.

Aby obliczyć strumień pola elektrycznego, przechodzący przez dowolną powierzchnię S , dzielimy ją na niewielkie elementy powierzchni ΔS_i (rys. 1.19). Zakładamy, że na całej powierzchni wektory $\Delta \mathbf{S}_i$ mają ten sam zwrot (w przypadku powierzchni zamkniętej kierujemy je na zewnątrz powierzchni). Mamy wówczas:

$$\Delta\Phi_{E_i} = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \quad (1.51)$$

Całkowity strumień pola elektrycznego Φ_E przez powierzchnię S jest więc w przybliżeniu równy:

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_{E_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \quad (1.52)$$

Dokładne wyrażenie na strumień pola otrzymamy przyjmując, że liczba elementów powierzchni ΔS_i dąży do nieskończoności, $n \rightarrow \infty$. Na podstawie definicji całki powierzchniowej mamy:

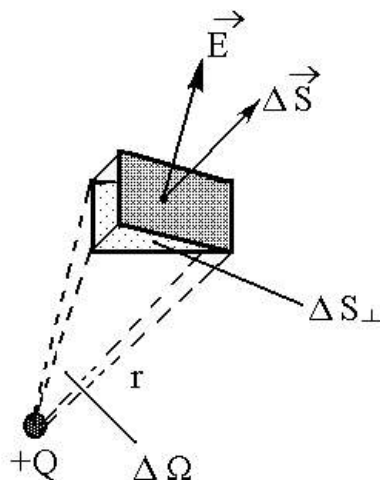
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.53)$$

Wobec tego:

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}. \quad (1.54)$$

Można zauważyć, że:

$$\Phi_E \sim N, \quad (1.55)$$



Rysunek 1.20:

gdzie N jest liczbą linii sił pola przechodzących przez powierzchnię S .

Założymy teraz, że pole elektryczne jest wytworzone przez pojedynczy ładunek punktowy $+Q$ i obliczymy strumień tego pola przechodzący przez niewielką powierzchnię ΔS , umieszczoną w odległości r od ładunku (rys. 1.20):

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Delta S} = E\Delta S_{\perp}. \quad (1.56)$$

Ponieważ pole elektryczne ładunku Q wynosi:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.57)$$

więc:

$$\Delta\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2}. \quad (1.58)$$

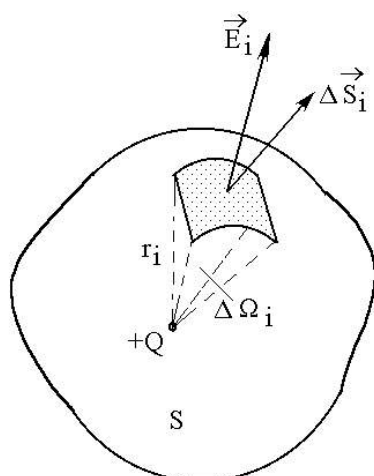
Ale na podstawie definicji kąta bryłowego mamy:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2} \quad (1.59)$$

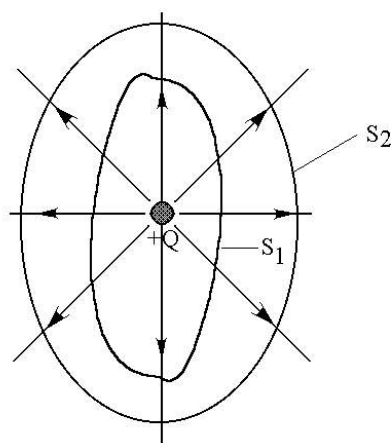
(rys. 1.20) i przedostatni wzór można zapisać jako:

$$\Delta\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega. \quad (1.60)$$

Rozpatrzmy teraz strumień pola elektrycznego przez dowolną, zamkniętą powierzchnię S , otaczającą ładunek Q (rys. 1.21). Dzieląc powierzchnię



Rysunek 1.21:



Rysunek 1.22:

na małe fragmenty ΔS_i i rozumując podobnie, jak przy definicji strumienia pola, na podstawie ostatniego wzoru otrzymamy:

$$\Delta\Phi_{Ei} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega_i, \quad (1.61)$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.62)$$

(pełny kąt bryłowy ma wartość $\Omega = 4\pi$). Jest to prawo Gaussa w przypadku pola elektrycznego wytworzonego przez pojedynczy ładunek punktowy. Można zauważyć, że z uwagi na związek $\Phi_E \sim N$ (N — liczba sił pola przechodzących przez powierzchnię S) niezależność strumienia Φ_E od kształtu

powierzchni S jest niemal oczywista (rys. 1.22; każdą powierzchnię otaczającą ładunek Q przecina jednakowa ilość linii sił). Należy jeszcze podkreślić, że w dowodzie twierdzenia Gaussa istotne znaczenie ma fakt, że natężenie pola ładunku punktowego $E \sim r^{-2}$ oraz, że kierunek wektora \mathbf{E} jest zgodny z kierunkiem wektora \mathbf{r} , poprowadzonego od ładunku Q do punktu, w którym wyznaczamy natężenie pola. Można wykazać, że w przypadku, gdy ładunek Q leży *poza* zamkniętą powierzchnią S , to strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię $\Phi_E = 0$.

Prawo Gaussa można łatwo uogólnić na przypadek pola, wytworzonego przez dowolny układ ładunków. Załóżmy np., że mamy układ n ładunków punktowych Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, leżących wewnątrz zamkniętej powierzchni S . Na podstawie zasady superpozycji pól elektrycznych mamy:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (1.63)$$

(\mathbf{E}_i — natężenie pola ładunku Q_i , \mathbf{E} — wypadkowe natężenia pola) i jak wynika z definicji strumienia pola elektrycznego (wzór (1.54)):

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^n \Phi_{Ei} \quad (1.64)$$

(Φ_{Ei} — strumień pola pochodzącego od ładunku Q_i , Φ_E — wypadkowy strumień pola). Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem Gaussa dla pojedynczego ładunku punktowego:

$$\Phi_{Ei} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}, \quad (1.65)$$

więc prawo Gaussa można zapisać ostatecznie w postaci:

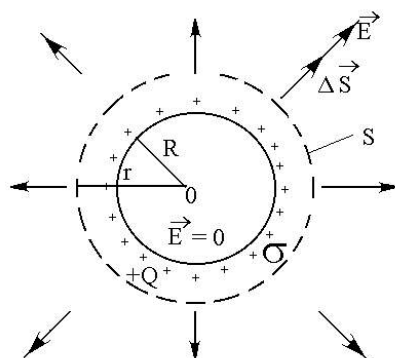
$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \quad (1.66)$$

(całkowanie po zamkniętej powierzchni oznaczono kółkiem w symbolu całki). Ładunek Q jest tutaj algebraiczną sumą wszystkich ładunków wewnątrz powierzchni S :

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (1.67)$$

Należy podkreślić, że w przypadku, gdy wewnątrz powierzchni S znajduje się jednakowa ilość ładunku dodatniego i ujemnego, to $Q = 0$ i $\Phi_E = 0$.

Prawo Gaussa umożliwia proste obliczenie natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} , pochodzącego od ciągłego rozkładu ładunku w przypadkach, gdy rozkład ten i natężenie pola cechuje wysoki stopień symetrii. Rozpatrzmy dwa proste przykłady.



Rysunek 1.23:

1. Pole ładunku rozłożonego ze stałą gęstością na powierzchni kuli (rys. 1.23; przyjmujemy, że ładunek powierzchniowy jest dodatni, a jego sumaryczna wartość wynosi $+Q$). Ze względu na sferycznie symetryczny rozkład ładunku natężenie pola elektrycznego musi być skierowane na zewnątrz naładowanej powierzchni prostopadle do niej. Za „powierzchnię Gaussa” można wybrać powierzchnię S kuli o promieniu $r > R$ (rys. 1.23). Obliczając strumień pola elektrycznego po tej powierzchni otrzymujemy:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2. \quad (1.68)$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia Gaussa $\Phi_E = Q/\epsilon_0$, więc:

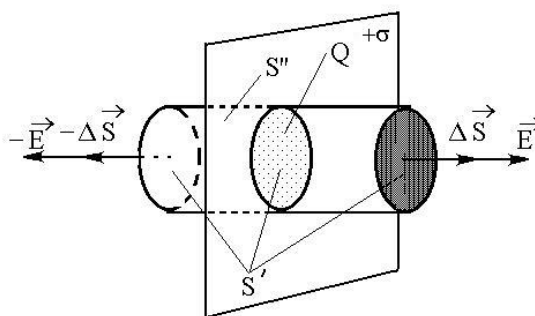
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.69)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R. \quad (1.70)$$

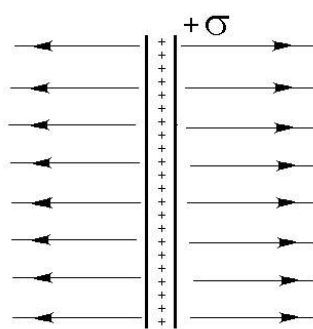
Zatem pole na zewnątrz sferycznej, naładowanej powierzchni jest identyczne z polem ładunku punktowego umieszczonego w jej środku. Wewnątrz tej powierzchni pole elektryczne jest natomiast równe zero, ponieważ nie ma tam żadnego ładunku elektrycznego:

$$E = 0, \quad r < R. \quad (1.71)$$

2. Pole ładunku rozłożonego ze stałą gęstością $+\sigma$ na nieskończonej płaszczyźnie (rys. 1.24 - 1.25). Ze względu na symetrię rozkładu ładunku wektor natężenia pola \mathbf{E} musi być prostopadły do płaszczyzny. Za „powierzchnię Gaussa” można wybrać powierzchnię S narysowanego walca o tworzących prostopadłych do płaszczyzny, tj. równoległych do wektora \mathbf{E} . Ponieważ strumień pola przechodzącego przez powierzchnię boczną S'' walca



Rysunek 1.24:



Rysunek 1.25:

jest równy zero (na tej powierzchni $\mathbf{E} \perp \Delta \mathbf{S}$), całkowity strumień przechodzący przez powierzchnię S równa się sumie strumieni przechodzących przez podstawy walca o powierzchni S' każda. Zatem:

$$\Phi_E = 2ES'. \quad (1.72)$$

Całkowity ładunek wewnątrz rozpatrywanej powierzchni wynosi:

$$Q = \sigma S' \quad (1.73)$$

i na podstawie twierdzenia Gaussa otrzymujemy:

$$2ES' = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}, \quad (1.74)$$

skąd:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}. \quad (1.75)$$

Należy zauważyć, że natężenie pola naładowanej nieskończonej płaszczyzny nie zależy od odległości (rys. 1.25).

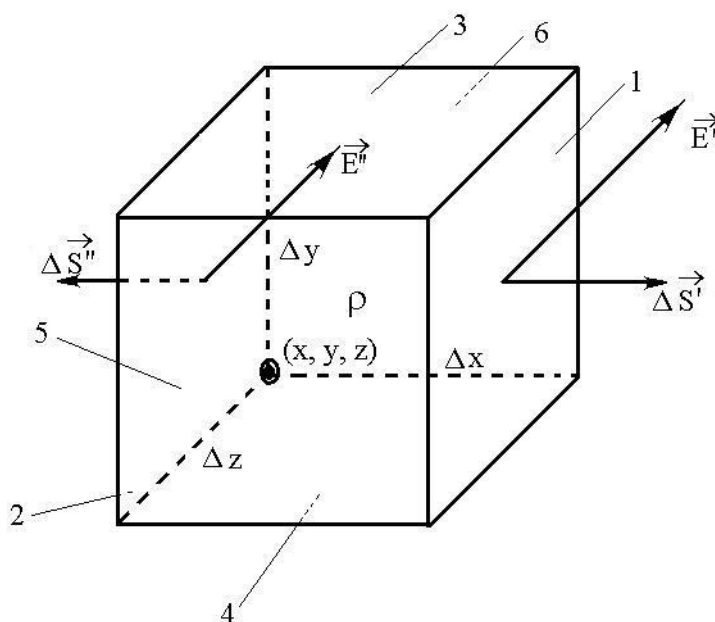
1.6 Różniczkowa postać prawa Gaussa

W dotychczasowym sformułowaniu prawo Gaussa przedstawia związek między całką z natężenia pola elektrycznego po dowolnej zamkniętej powierzchni a całkowitym ładunkiem elektrycznym, zawartym wewnątrz tej powierzchni. Pokażemy obecnie, że można przejść od tej postaci prawa Gaussa, zwanej całkową, do innej postaci nazywanej różniczkową, która określa związek między gęstością ładunku w danym punkcie przestrzeni i natężeniem pola elektrycznego w otoczeniu tego punktu.

Założymy, że mamy do czynienia z objętościowym rozkładem ładunku, którego gęstość $\rho(\mathbf{r})$ jest ciągłą funkcją położenia. Wówczas, jak można wykazać np. na podstawie prawa Gaussa, wytworzone przez ten ładunek pole elektryczne $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ będzie się również zmieniać w sposób ciągły w przestrzeni. Oznacza to, że w niewielkim obszarze przestrzeni gęstość ładunku $\rho(\mathbf{r})$ jest niemal stała a pole elektryczne $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ jest prawie jednorodne. Obliczymy teraz strumień tego pola po powierzchni bardzo małego prostopadłościanu, przedstawionego na rysunku 1.26. Strumień pola wypływający przez ścianki 1 i 2 wynosi w przybliżeniu:

$$\Delta\Phi_{E,1-2} = \mathbf{E}' \cdot \Delta\mathbf{S}' + \mathbf{E}'' \cdot \Delta\mathbf{S}'' = (E'_x - E''_x)\Delta y\Delta z. \quad (1.76)$$

Ponieważ różnica natężeń pól E'_x i E''_x jest z założenia bardzo mała, możemy



Rysunek 1.26:

napisać:

$$\begin{aligned} E'_x - E''_x &= E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) \\ &\approx E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x - E_x(x, y, z) \\ &= \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Wobec tego:

$$\Delta\Phi_{E,1-2} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V, \quad (1.78)$$

gdzie $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ jest objętością rozpatrywanego prostopadłościanu. Licząc analogicznie strumienie pola, wypływające przez pozostałe pary ścianek, otrzymujemy:

$$\Delta\Phi_{E,3-4} = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta V, \quad (1.79)$$

$$\Delta\Phi_{E,5-6} = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta V. \quad (1.80)$$

Całkowity strumień pola przez powierzchnię prostopadłościanu,

$$\Delta\Phi_E = \Delta\Phi_{E,1-2} + \Delta\Phi_{E,3-4} + \Delta\Phi_{E,5-6}, \quad (1.81)$$

jest więc równy:

$$\Delta\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V. \quad (1.82)$$

Wyrażenie w nawiasie jest wielkością skalarną, zwaną *dywergencją* (*rozbieżnością*) pola wektorowego $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, którą oznacza się jako $\nabla \cdot \mathbf{E}$ (lub $\text{div } \mathbf{E}$):

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}. \quad (1.83)$$

Określenie dywergencji stosuje się do dowolnego pola wektorowego. Operator ∇ (nabla) można uważać za symboliczny wektor:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \text{ itd.}), \quad (1.84)$$

gdzie $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ — wektory jednostkowe w kierunku osi x, y, z . Ponieważ:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x + \hat{\mathbf{y}} E_y + \hat{\mathbf{z}} E_z, \quad (1.85)$$

więc dywergencję (1.83) wektora \mathbf{E} można formalnie traktować jako iloczyn skalarny wektorów ∇ i \mathbf{E} . Wzór (1.82) możemy zatem przepisać w postaci:

$$\Delta\Phi_E = \nabla \cdot \mathbf{E} \Delta V. \quad (1.86)$$

Widać, że dywergencja wektora \mathbf{E} w danym punkcie jest równa strumieniowi pola elektrycznego, przypadającego na jednostkę objętości, w otoczeniu tego punktu.

Skorzystamy obecnie z prawa Gaussa, zgodnie z którym:

$$\Delta\Phi_E = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\Delta V}{\varepsilon_0}. \quad (1.87)$$

Porównując dwa ostatnie wzory otrzymujemy *prawo Gaussa w postaci różniczkowej*:

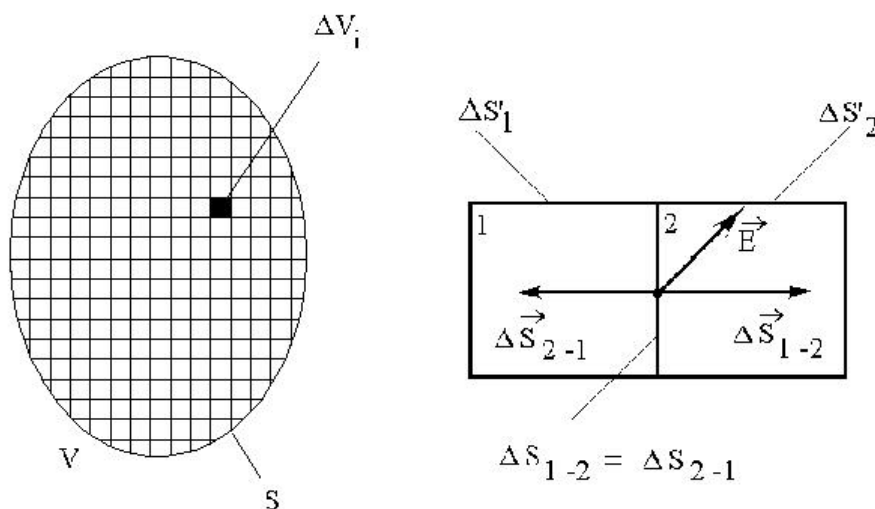
$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}. \quad (1.88)$$

Jest widoczne, że dywergencja pola elektrycznego różni się od zera tylko w tych obszarach przestrzeni, gdzie istnieje ładunek objętościowy.

Na podstawie wzoru (1.86) można wyprowadzić tzw. *twierdzenie Gaussa*, stosujące się do dowolnego pola wektorowego. Przyjmijmy, że naładowane ładunkiem objętościowym ciało zostało podzielone na niewielkie fragmenty o objętości ΔV_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (rys. 1.27). Stosując wzór (1.86) do i -tego fragmentu ciała, możemy napisać:

$$\Delta\Phi_{E,i} = \oint_{\Delta S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{E}_i \Delta V_i, \quad (1.89)$$

gdzie $\Delta\Phi_{E,i}$ jest strumieniem pola przez powierzchnię ΔS_i fragmentu o numerze i . Pokażemy teraz, że przy sumowaniu strumieni pól, wypływających



Rysunek 1.27:

z sąsiednich fragmentów, strumienie przez ich wspólne powierzchnie się redukują. W przypadku pokazanym na rysunku całkowite strumienie po powierzchniach fragmentów 1 i 2 wynoszą:

$$\Delta\Phi_{E,1} = \oint_{\Delta S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_1'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{1-2}, \quad (1.90)$$

$$\Delta\Phi_{E,2} = \oint_{\Delta S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_2'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{2-1}. \quad (1.91)$$

(ΔS_{1-2} — wspólna powierzchnia obszarów 1 i 2; $\Delta S_i'$, $i = 1, 2$ — pozostała część powierzchni, ograniczająca obszar i). Ponieważ $\Delta\mathbf{S}_{2-1} = -\Delta\mathbf{S}_{1-2}$, więc:

$$\int_{\Delta S_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{2-1} = - \int_{\Delta S_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{1-2}. \quad (1.92)$$

Sumując oba strumienie otrzymamy wobec tego:

$$\Delta\Phi_{E,1} + \Delta\Phi_{E,2} = \int_{\Delta S_1'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S_2'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Delta S_1' + \Delta S_2'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.93)$$

Wyrażenie to przedstawia całkowity strumień pola elektrycznego po zewnętrznych powierzchniach obu fragmentów.

Z powyższych rozważań wynika, że sumując wyrażenie (1.89) po wszystkich fragmentach ciała otrzymamy wzór:

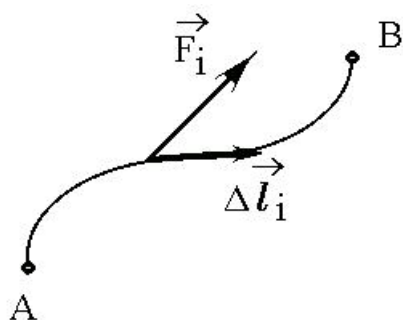
$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV}, \quad (1.94)$$

gdzie S jest zewnętrzną powierzchnią a V objętością ciała. Wzór ten przedstawia właśnie twierdzenie Gaussa.

1.7 Energia potencjalna ładunku w polu elektrostatycznym

Zwracaliśmy już uwagę, że prawo Coulomba ma postać analogiczną do prawa powszechnej grawitacji Newtona. Siły elektrostatyczne, działające na ładunki, powinny być więc, podobnie jak siły grawitacji, *siłami zachowawczymi*. W tym przypadku można wprowadzić pojęcie energii potencjalnej ładunku w polu elektrostatycznym i potencjału pola elektrostatycznego w podobny sposób, jak dla pola grawitacyjnego.

Przypomnimy najpierw definicję pracy W_{AB} , wykonanej przez dowolną siłę \mathbf{F} przy przemieszczeniu ciała po drodze krzywoliniowej od punktu A do punktu B (rys. 1.28). W celu jej obliczenia dzielimy drogę ciała na du-



Rysunek 1.28:

żną liczbę niewielkich odcinków $\Delta \mathbf{l}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ponieważ praca ΔW_i wykonana na odcinku $\Delta \mathbf{l}_i$ jest równa:

$$\Delta W_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i, \quad (1.95)$$

więc:

$$W_{AB} \approx \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i. \quad (1.96)$$

Granica tej sumy przy $n \rightarrow \infty$ oraz $\Delta \mathbf{l}_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) jest całka krzywoliniowa od punktu A do punktu B :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.97)$$

Wobec tego praca W_{AB} wyraża się całką:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.98)$$

W przypadku sił zachowawczych praca W_{AB} nie zależy od drogi (rys. 1.29):

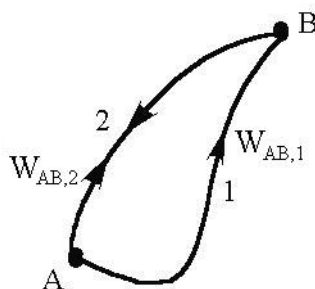
$$W_{AB,1} = W_{AB,2}. \quad (1.99)$$

Ponieważ praca wykonana przy przemieszczaniu ciała w odwrotnym kierunku ma przeciwny znak, $W_{AB} = -W_{BA}$, więc w szczególności:

$$W_{AB,2} = -W_{BA,2} \quad (1.100)$$

i z dwóch ostatnich równości wynika, że:

$$W_{AB,1} + W_{BA,2} = 0. \quad (1.101)$$



Rysunek 1.29:

W przypadku sił zachowawczych praca wykonana po zamkniętej drodze jest więc równa zero, co można zapisać jako:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.102)$$

(C — krzywa, wzdłuż której obliczamy całkę; kółko oznacza że krzywa ta jest zamknięta). Ponieważ praca W_{AB} zależy wówczas tylko od położenia punktów A i B , można wyrazić ją wzorem:

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} \quad (1.103)$$

gdzie E_{pA} i E_{pB} — energia potencjalna ciała w punktach A i B .

Wykażemy teraz, że siły działające na ładunki w polu elektrycznym są istotnie siłami zachowawczymi. W tym celu rozważymy pracę wykonaną przy przemieszczaniu ładunku q w polu elektrycznym, wytworzonym przez punktowy ładunek Q (rys. 1.30). Biorąc pod uwagę, że siła działająca na ładunek q wynosi:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (1.104)$$

pracę ΔW sił pola elektrycznego na odcinku $\Delta\mathbf{l}$ można wyrazić jako:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{l} = q\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l}. \quad (1.105)$$

Ale na podstawie rysunku 1.30

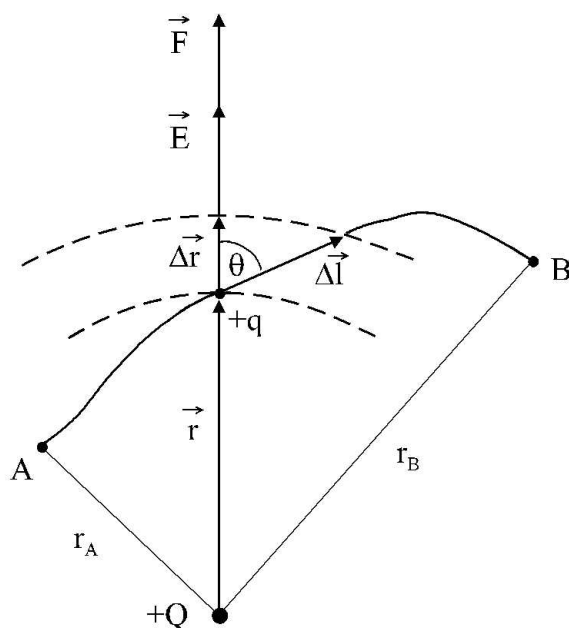
$$\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l} = E\Delta l \cos \theta = E\Delta r, \quad (1.106)$$

skąd wynika, że:

$$\Delta W = qE\Delta r. \quad (1.107)$$

Należy zauważyć, że praca ΔW nie zależy od kąta θ między wektorami \mathbf{E} i $\Delta\mathbf{l}$ a jedynie od długości odcinka Δr . Praca wykonana na całej drodze od punktu A do punktu B będzie, zgodnie z wzorami (1.105) i (1.107), równa:

$$W_{AB} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_{r_A}^{r_B} E dr, \quad (1.108)$$



Rysunek 1.30:

gdzie r_A i r_B oznaczają odległości punktów A i B od ładunku Q (rys. 1.30). Ponieważ ostateczna całka zależy tylko od r_A i r_B , praca W_{AB} jest istotnie niezależna od drogi całkowania. Na podstawie zasady superpozycji pól elektrycznych stwierdzenie to można uogólnić na przypadek pola, wytworzonego przez dowolny układ ładunków. Pole elektryczne jest więc istotnie polem zachowawczym (potencjalnym lub bezwirowym). Zgodnie z wzorami (1.102) i (1.104), całka z natężenia pola elektrycznego po zamkniętej krzywej C jest równa zero:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.109)$$

Należy zwrócić uwagę, że w powyższym dowodzie korzystano jedynie z faktu, że siła \mathbf{F} i natężenie pola \mathbf{E} są skierowane wzdłuż promienia \mathbf{r} i zależą tylko od odległości r . Nie było natomiast istotne, że siła $F \sim r^{-2}$. Dlatego dowolne pole sił, dla którego $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ i $F = F(r)$ (tzw. pole centralne) będzie również polem potencjalnym.

Ostatnią całkę we wzorze (1.108) można łatwo obliczyć. Ponieważ natężenie pola ładunku Q wynosi:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.110)$$

więc

$$\begin{aligned} W_{AB} &= q \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r_B}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Z porównania ostatniego wzoru ze wzorem (1.103) wynika, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ładunków, znajdujących się w odległości r , wyraża się wzorem:

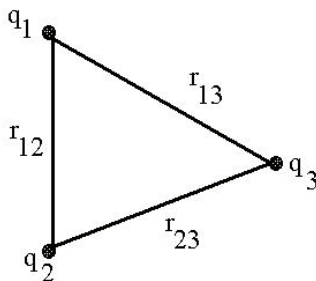
$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.112)$$

Ponieważ we wzorze (1.103) występuje różnica energii potencjalnych, do wyrażenia po prawej stronie ostatniego wzoru można dodać dowolną stałą. Przyjmuje się jednak zwykle, że energia potencjalna ładunków dąży do zera, gdy $r \rightarrow \infty$, skąd wynika, że stała ta jest równa zero. Zgodnie ze wzorem (1.103), energia potencjalna E_p dwóch ładunków umieszczonych w odległości r jest wówczas równa pracy $W_{r\infty}$, jaką wykonałyby siły oddziaływania elektrostatycznego przy rozsunięciu tych ładunków na nieskończoną odległość:

$$E_p = W_{r\infty}. \quad (1.113)$$

W przypadku dowolnej liczby ładunków punktowych q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (rys. 1.31) ich całkowita energia potencjalna jest sumą energii potencjalnych poszczególnych par ładunków:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (1.114)$$



Rysunek 1.31:

Tutaj $r_{ij} = r_{ji}$ jest odległością ładunków q_i oraz q_j . Czynniki „ $\frac{1}{2}$ ” pojawia się dlatego, że w powyższej sumie energia potencjalna każdej pary ładunków występuje, jak można sprawdzić, dwukrotnie.

1.8 Potencjał pola elektrostatycznego

Ze wzoru (1.112) wynika, że energia potencjalna E_p ładunku próbnego q w polu elektrycznym jest proporcjonalna do wielkości tego ładunku. Wobec tego stosunek energii potencjalnej E_p do ładunku q nie zależy od wielkości ładunku i jednoznacznie charakteryzuje pole elektryczne. Stosunek ten nazywa się *potencjałem φ pola elektrostatycznego* w danym punkcie:

$$\boxed{\varphi = \frac{E_p}{q}}. \quad (1.115)$$

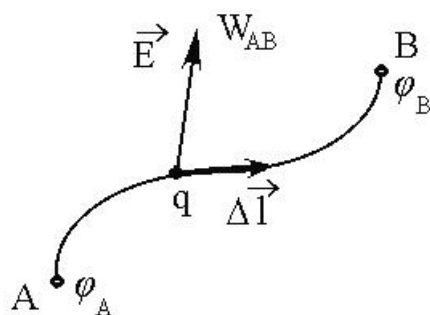
Należy zauważyć, że potencjał pola, w odróżnieniu od natężenia pola \mathbf{E} , jest wielkością skalarną. Jednostką potencjału pola elektrycznego jest volt (V):

$$[\varphi] = V = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}}. \quad (1.116)$$

Pracę, wykonaną przez siły elektryczne przy przemieszczaniu ładunku q z punktu A do punktu B pola elektrycznego (rys. 1.32) można teraz, korzystając ze wzoru (1.103), zapisać jako:

$$W_{AB} = q(\varphi_A - \varphi_B). \quad (1.117)$$

Jest więc ona równa iloczynowi tego ładunku i różnicy potencjałów w początkowym i końcowym punkcie drogi. Ponieważ pracę W_{AB} można wyrazić



Rysunek 1.32:

również całką:

$$W_{AB} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.118)$$

porównując dwa ostatnie wzory otrzymujemy związek między różnicą potencjałów i natężeniem pola elektrycznego:

$$\boxed{\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}. \quad (1.119)$$

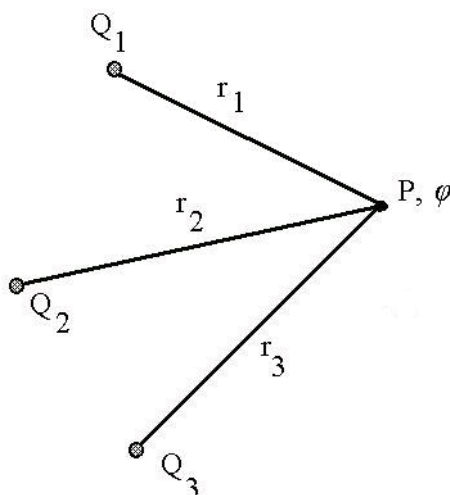
Przyjmijmy teraz, że końcowy punkt B drogi całkowania nieskończenie oddala się od ładunków wytwarzających pole elektryczne \mathbf{E} . Wówczas $E_{pB} \rightarrow 0$ i $\varphi_B \rightarrow 0$. Przyjmując oznaczenie $\varphi_A = \varphi$ i zakładając, że położenie punktu A określa wektor \mathbf{r} , z ostatniego wzoru otrzymuje się:

$$\varphi = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.120)$$

Jak wynika ze wzoru (1.112), potencjał pola wytwarzanego przez pojedynczy ładunek punktowy Q w odległości r od niego wynosi:

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}. \quad (1.121)$$

Jeżeli pole elektryczne jest wytwarzane przez n ładunków punktowych Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (rys. 1.33) to, jak wynika z zasady superpozycji pól elek-



Rysunek 1.33:

trycznych, wypadkowy potencjał φ będzie sumą algebraiczną potencjałów φ_i wytworzonych przez poszczególne ładunki:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.122)$$

Ponieważ:

$$\varphi_i = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (1.123)$$

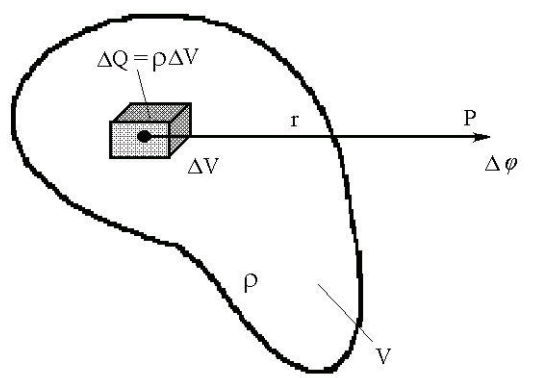
więc wypadkowy potencjał

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}. \quad (1.124)$$

W przypadku, gdy ładunek elektryczny wytwarzający pole, jest rozłożony w ciągły sposób powyższa suma musi być zastąpiona odpowiednią całką. Dla objętościowego rozkładu ładunku o gęstości ρ (rys. 1.34) wypadkowy potencjał pola elektrycznego określa wzór:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV. \quad (1.125)$$

(V - objętość ciała zawierającego ładunek). Należy zauważyć, że obliczenie potencjału pola φ jest zwykle łatwiejsze niż obliczenie natężenia pola \mathbf{E} , wytwarzanych przez ciągły rozkład ładunku (patrz wzór (1.44)). Przy obliczaniu natężenia pola należy w istocie obliczyć trzy całki, odpowiadające składowym E_x , E_y i E_z , podczas gdy do wyznaczenia potencjału wystarczy obliczyć jedną całkę.



Rysunek 1.34:

1.9 Związek między potencjałem i natężeniem pola elektrostatycznego

Wzór (1.119) z poprzedniego podrozdziału określa związek między różnicą potencjałów pola elektrycznego w dwóch punktach a całką z natężenia pola po drodze łączącej te punkty. Zapiszemy obecnie ten wzór w formie różniczkowej, dającej bezpośredni związek między potencjałem φ pola w danym punkcie i natężeniem \mathbf{E} pola w otoczeniu tego punktu.

Będziemy zakładać, że natężenie pola $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i potencjał pola $\varphi(\mathbf{r})$ zmieniają się w sposób ciągły w przestrzeni. Jeżeli odległość Δr dwóch punktów A i B jest dostatecznie mała, różnicę potencjałów w tych punktach można wyrazić przybliżonym wzorem (rys. 1.35):

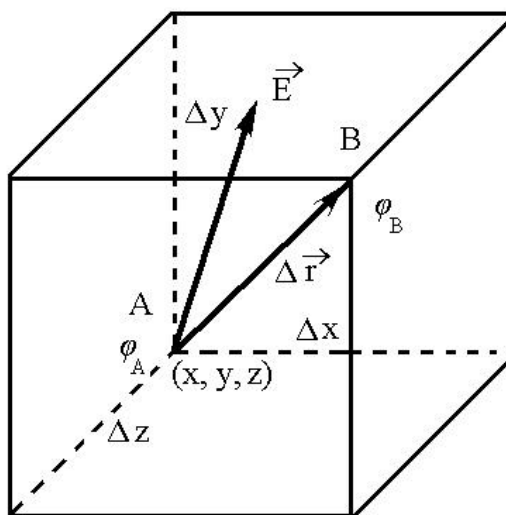
$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_B - \varphi_A = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z) & (1.126) \\ &\approx \varphi(x, y, z) + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \\ &\quad - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} \Delta z. \end{aligned}$$

Zdefiniujemy teraz wektor, zwany *gradientem* pola skalarnego $\varphi(\mathbf{r})$ i oznaczany jako $\nabla\varphi$ (lub *grad* φ):

$$\nabla\varphi = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (\nabla\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \text{ itd.}). \quad (1.127)$$

Wtedy ostatni wzór można zapisać jako:

$$\Delta\varphi = (\nabla\varphi) \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (1.128)$$



Rysunek 1.35:

Z drugiej strony, ponieważ zmianę natężenia pola elektrycznego na odcinku $\Delta \mathbf{r}$ można zaniedbać, na podstawie wzoru (1.119) otrzymujemy:

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \approx -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (1.129)$$

Porównując dwa ostatnie wzory dostajemy związek:

$$\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} = -(\nabla\varphi) \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (1.130)$$

Ponieważ kierunek wektora $\Delta \mathbf{r}$ można obrać dowolnie, związek między potencjałem i natężeniem pola elektrycznego określa wzór:

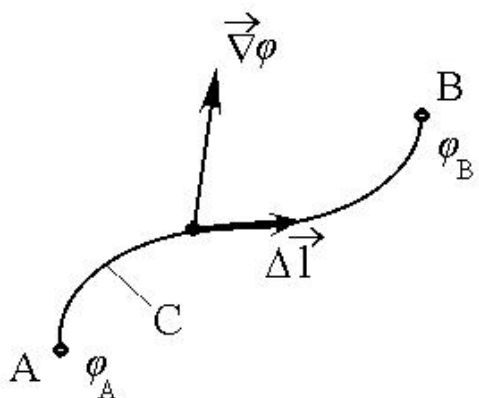
$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \text{ itd.})}. \quad (1.131)$$

Natężenie pola elektrycznego w danym punkcie jest więc równe gradientowi potencjału pola w tym punkcie, wziętemu z przeciwnym znakiem. Zwróćmy uwagę, że zgodnie z ostatnim wzorem wymiar natężenia pola elektrycznego można wyrazić jako $[E] = \text{V/m}$ (poprzednio podawaliśmy, że $[E] = \text{N/C}$). Zauważymy jeszcze, że z ostatniego wzoru i wzoru (1.119) wynika wzór:

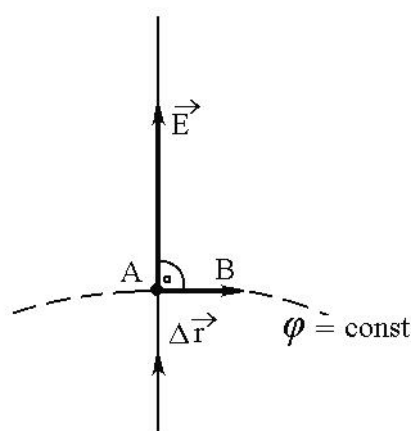
$$\boxed{\varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}} \quad (1.132)$$

(rys. 1.36), słuszny dla dowolnego pola skalarne $\varphi(\mathbf{r})$.

Miejsce geometryczne punktów o jednakowym potencjale nosi nazwę *powierzchni ekwipotencjalnej*. Równaniem powierzchni ekwipotencjalnej jest więc $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$. Zwykle przy przedstawianiu graficznym pola elektrycznego powierzchnie ekwipotencjalne rysuje się tak, aby różnice potencjałów



Rysunek 1.36:



Rysunek 1.37:

między dwoma sąsiednimi powierzchniami ekwipotencjalnymi były jednakowe. Powierzchnie ekwipotencjalne pól ładunków punktowych oraz jednorodnego pola pokazano na rysunkach 1.16 - 1.17.

Zastosujemy teraz wzór (1.129) do przypadku, gdy początek i koniec wektora $\Delta \mathbf{r}$ leżą na danej powierzchni ekwipotencjalnej (por. rys. 1.37). Ponieważ wówczas różnica potencjałów w punktach B i A jest równa zero, $\Delta\varphi = 0$, więc:

$$\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r} = 0, \quad (1.133)$$

skąd wynika, że:

$$\mathbf{E} \perp \Delta \mathbf{r}. \quad (1.134)$$

Wektory natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} i linie sił pola są więc prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych. Jest to zrozumiałe, ponieważ przy przemieszczaniu ładunku po powierzchni ekwipotencjalnej nie może być wykonywana żadna praca przez siły oddziaływania elektrostatycznego.

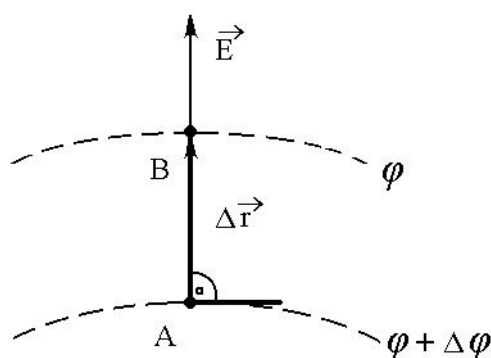
Rozpatrzmy obecnie wzór (1.129) w przypadku, gdy wektor $\Delta \mathbf{r}$ jest skierowany zgodnie z wektorem natężenia pola \mathbf{E} (rys. 1.38). Wówczas:

$$\Delta\varphi = -E\Delta r, \quad (1.135)$$

skąd widać, że wektor \mathbf{E} jest skierowany od powierzchni o wyższym potencjale do powierzchni o niższym potencjale.

Z ostatniego wzoru wynika, że wartość natężenia pola

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad (1.136)$$



Rysunek 1.38:

jeżeli pochodną obliczamy wzdłuż kierunku natężenia pola elektrycznego. Na podstawie wzoru (1.129) można łatwo wykazać, że przy obliczaniu pochodnej potencjału φ w innym kierunku będzie ona miała mniejszą wartość bezwzględną. Zatem w pobliżu danego punktu pola elektrycznego potencjał zmienia się najszybciej w kierunku natężenia pola.

Biorąc pod uwagę, że $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, powyższe uwagi stosują się również do gradientu potencjału (w istocie do gradientu dowolnej funkcji skalarnej). Wektor $\nabla\varphi$ jest skierowany jednak przeciwnie niż wektor \mathbf{E} , od powierzchni ekwipotencjalnej o niższym potencjale do powierzchni ekwipotencjalnej o wyższym potencjale. Wektor $\nabla\varphi$ jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnych a jego bezwzględną wartość określa wzór:

$$|\nabla\varphi| = \frac{d\varphi}{dr} \quad (1.137)$$

(przy założeniu, że pochodną obliczamy w kierunku wektora $\nabla\varphi$). Wartość bezwzględna $\nabla\varphi$ jest więc równa przyrostowi potencjału, przypadającemu na jednostkową odległość.

Korzystając z prawa Gaussa w różniczkowej postaci,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.138)$$

możemy teraz podać równanie, wyrażające bezpośredni związek między gęstością ładunku w danym punkcie a potencjałem pola elektrycznego w otoczeniu tego punktu. Ponieważ $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, więc ostatnie równanie daje:

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.139)$$

Obliczymy wyrażenie występujące po lewej stronie tego równania. Ponieważ:

$$\nabla\varphi = \hat{x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (1.140)$$

więc na podstawie definicji dywergencji pola wektorowego (wzór (1.83)):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \varphi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (1.141)$$

Otrzymane wyrażenie oznacza się jako $\nabla^2 \varphi$ ($\Delta \varphi$, $\text{div grad } \varphi$):

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.\quad (1.142)$$

Symboliczny operator:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\quad (1.143)$$

nazywa się operatorem Laplace'a lub laplasjanem. Ponieważ operator gradientu — nabla jest określony wzorem:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z},\quad (1.144)$$

widać, że operator Laplace'a można uważać za kwadrat operatora nabla:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla.\quad (1.145)$$

Zgodnie ze wzorem (1.139) potencjał pola elektrycznego spełnia równanie:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}},\quad (1.146)$$

zwane *równaniem Poissona*. Znając potencjał pola elektrycznego w otoczeniu danego punktu można więc na podstawie równania Poissona obliczyć gęstość ładunku w tym punkcie. Jednakże na ogół uważamy gęstość ładunku ρ w równaniu Poissona za wielkość znaną, a potencjał pola φ za wielkość niewiadomą, którą musimy wyznaczyć. W przypadku, gdy w pewnym obszarze nie ma ładunku przestrzennego, $\rho(\mathbf{r}) = 0$, potencjał pola elektrycznego spełnia w tym obszarze równanie:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0},\quad (1.147)$$

nazywane *równaniem Laplace'a*. Metody rozwiązywania równań Poissona i Laplace'a są omawiane m.in. w elektrodynamice teoretycznej. Równania te występują również w innych dziedzinach fizyki, np. w teorii grawitacji, hydrodynamice, teorii przewodnictwa cieplnego, teorii dyfuzji, itd.

1.10 Bezwirowość pola elektrostatycznego

Zapiszemy teraz w postaci różniczkowej równanie (1.109):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.148)$$

(C — dowolna krzywa zamknięta), wyrażające fakt, że pole elektrostatyczne jest polem potencjalnym (bezwirowym). Będziemy zakładać, że natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zmienia się w sposób ciągły w przestrzeni i obliczymy powyższą całkę dla b. małego konturu, pokazanego na rysunku 1.39. Suma całek z natężenia pola elektrycznego po bokach 1 i 2 konturu wynosi w przybliżeniu:

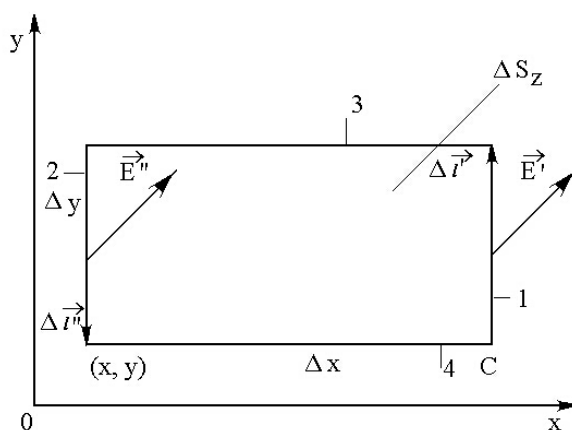
$$\int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx \mathbf{E}' \cdot \Delta\mathbf{l}' + \mathbf{E}'' \cdot \Delta\mathbf{l}'' = (E'_y - E''_y)\Delta y. \quad (1.149)$$

Ponieważ natężenia E'_y i E''_y pola elektrycznego niewiele się różnią, można w przybliżeniu napisać:

$$\begin{aligned} E'_y - E''_y &= E_y(x + \Delta x, y, z) - E_y(x, y, z) \\ &\approx E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x - E_y(x, y, z) \\ &= \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \end{aligned} \quad (1.150)$$

Otrzymujemy więc wzór:

$$\int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta S_z, \quad (1.151)$$



Rysunek 1.39:

gdzie $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ jest powierzchnią prostokąta, którego brzeg odpowiada wybranemu konturowi całkowania C . Licząc w podobny sposób całkę po pozostałych bokach 3 i 4 konturu otrzymuje się:

$$\int_{C_{3-4}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta S_z. \quad (1.152)$$

Ponieważ całka po zamkniętym konturze C jest równa:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_{3-4}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.153)$$

więc:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \Delta S_z. \quad (1.154)$$

Zdefiniujemy obecnie wektor, zwany *rotacją* pola wektorowego \mathbf{E} , który oznacza się jako $\nabla \times \mathbf{E}$ (lub $\text{rot } \mathbf{E}$):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.155)$$

Zgodnie z podanym wzorem rotację pola \mathbf{E} można formalnie traktować jako iloczyn wektorowy wektorów ∇ i \mathbf{E} . Obliczając wyznacznik otrzymujemy wzór przedstawiający składowe wektora $\nabla \times \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \hat{x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &+ \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.156)$$

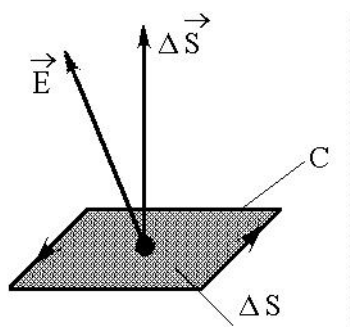
Jest teraz widoczne, że wzór (1.154) można zapisać jako:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{E})_z \Delta S_z. \quad (1.157)$$

Obliczając tę całkę założyliśmy, że kontur całkowania C leży w płaszczyźnie xy układu współrzędnych. Licząc analogicznie całki po konturach leżących w płaszczyznach yz i xz otrzymuje się podobne wzory, w których występują x -owa i y -owa składowa $\nabla \times \mathbf{E}$. W przypadku małego konturu całkowania C , leżącego w dowolnej płaszczyźnie, otrzymuje się:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \Delta \mathbf{S}, \quad (1.158)$$

gdzie $\Delta \mathbf{S}$ jest wektorem prostopadłym do elementu powierzchni, obejmowanego przez krzywą C . Kierunek obiegu krzywej C musi być zgodny z



Rysunek 1.40:

regułą śruby prawoskrętnej. Oznacza to, że prawoskrętna śruba, obracając się zgodnie z kierunkiem całkowania po konturze C , powinna poruszać się w kierunku wektora $\Delta \mathbf{S}$ (rys. 1.40).

Całkę z wektora pola $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ po zamkniętej konturze nazywa się *cyrkulacją* tego pola. W ostatnim wzorze wyrażenie po prawej stronie przedstawia składową rotacji pola elektrycznego, $\nabla \times \mathbf{E}$, normalną (prostopadłą) do elementu powierzchni ΔS (równoległą do wektora $\Delta \mathbf{S}$), pomnożoną przez ΔS . Można więc stwierdzić, że składowa rotacji pola wektorowego, normalna do małego elementu powierzchni, jest równa cyrkulacji tego pola po krzywej otaczającej ten element, przypadającej na jednostkę powierzchni.

Ponieważ pole elektrostatyczne jest polem potencjalnym, jego cyrkulacja liczona po dowolnej krzywej jest równa zero. Ze wzoru (1.158) otrzymujemy więc równanie:

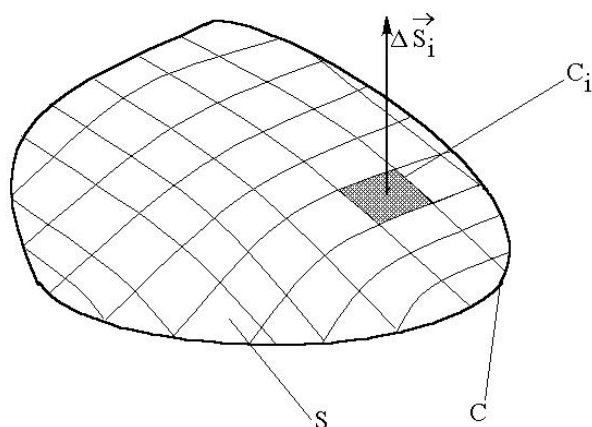
$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \Delta \mathbf{S} = 0. \quad (1.159)$$

W powyższym równaniu wektor $\Delta \mathbf{S}$ można wybrać w dowolny sposób. Potencjalność pola elektrycznego odpowiada więc znikaniu jego rotacji w każdym punkcie:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}. \quad (1.160)$$

Równanie to wyraża fakt, że linie sił pola elektrostatycznego nie mogą być liniami zamkniętymi. W przeciwnym przypadku cyrkulacja pola elektrostatycznego, liczona wzdłuż krzywej pokrywającej się z jedną z linii sił i rotacja pola elektrycznego w co najmniej jednym punkcie przestrzeni byłby różne od zera. Ostatnie równanie, łącznie z prawem Gaussa zapisanym w różniczkowej postaci (wzór (1.88)), stanowią kompletny układ równań opisujących pole elektrostatyczne w próżni.

Ze wzoru (1.158) można wyprowadzić tzw. twierdzenie Stokesa, słuszne dla dowolnego pola wektorowego. Wyobraźmy sobie, że dowolna powierzchnia S , ograniczona krzywą C , została umieszczona w polu elektrycznym o natężeniu \mathbf{E} . Powierzchnię tę można podzielić na małe fragmenty o polu



Rysunek 1.41:

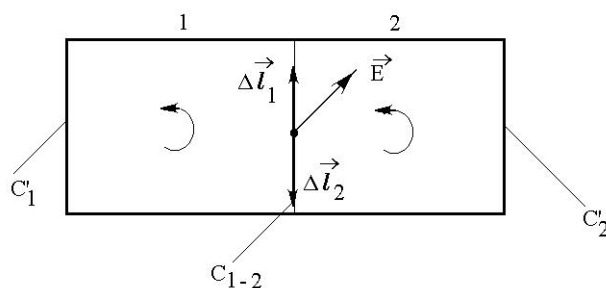
ΔS_i , ograniczone krzywymi C_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (rys. 1.41). Stosując wzór (1.158) do elementu powierzchni o numerze i otrzymujemy:

$$\oint_{C_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{E})_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \quad (1.161)$$

Można pokazać, że suma algebraiczna cyrkulacji pola elektrycznego po wszystkich krzywych C_i jest równa cyrkulacji po krzywej C ograniczającej powierzchnię S . Udowodnimy to w przypadku dwóch krzywych, przedstawionych na rysunku 1.42. (C_{1-2} — wspólna część krzywych C_1 i C_2 , C'_i , $i = 1, 2$ — pozostała część krzywych). Cyrkulację pola \mathbf{E} po krzywych C_1 i C_2 można zapisać jako:

$$\oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C'_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_1, \quad (1.162)$$

$$\oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C'_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_2. \quad (1.163)$$



Rysunek 1.42:

Ponieważ $\Delta l_2 = -\Delta l_1$ (rys. 1.42), więc

$$\int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_2 = - \int_{C_{1-2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (1.164)$$

i z powyższych wzorów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{C'_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C'_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint_{C'_1+C'_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (1.165)$$

Ostatnia całka przedstawia cyrkulację pola elektrycznego po zamkniętej krzywej, otaczającej oba fragmenty powierzchni. Sumując wyrażenie (1.161) po wszystkich fragmentach powierzchni otrzymuje się więc wzór:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}}, \quad (1.166)$$

przedstawiający *twierdzenie Stokesa*.

1.11 Dipol elektryczny

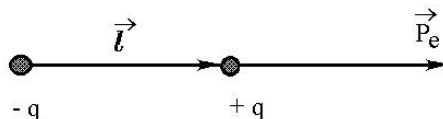
Dipolem elektrycznym nazywamy układ dwóch ładunków elektrycznych o jednakowych wartościach bezwzględnych i przeciwnych znakach, $+q$ i $-q$, umieszczonych w odległości l od siebie (rys. 1.43). Wektor

$$\mathbf{p}_e = ql \quad (1.167)$$

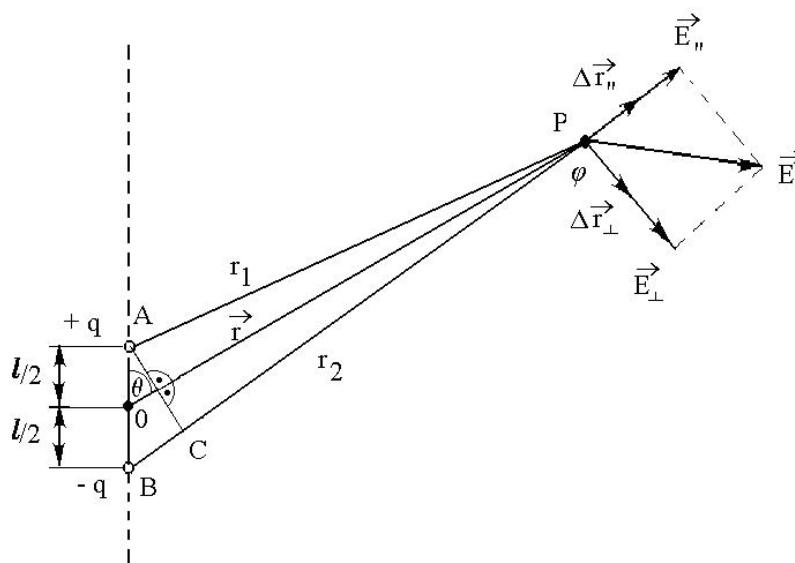
nazywa się *momentem elektrycznym dipola* (*momentem dipolowym*). Jest on skierowany od ładunku ujemnego do dodatniego. Wymiarem momentu dipolowego jest:

$$[p_e] = \text{C} \cdot \text{m}. \quad (1.168)$$

Zakłada się zwykle, że odległość r w której wyznaczamy potencjał i natężenie pola dipola elektrycznego, jest znacznie większa od odległości l między



Rysunek 1.43:



Rysunek 1.44:

obydwoma ładunkami, $r \gg l$. Pojęcie dipola elektrycznego, jakkolwiek bardzo proste, ma istotne znaczenie w elektrodynamice. Poniżej omówimy krótko pole elektrycznego dipola i oddziaływanie dipola z zewnętrznym polem elektrycznym.

Obliczymy najpierw potencjał pola dipola elektrycznego. Dla uproszczenia rachunków wygodnie jest przyjąć, że położenie punktu P , w którym wyznaczamy potencjał, określają współrzędne sferyczne r i θ (rys. 1.44). Jest to dopuszczalne, ponieważ potencjał i natężenie pola dipola muszą wykazywać symetrię względem osi dipola, zaznaczonej na rysunku przerywaną linią. Biorąc pod uwagę, że potencjał dipola φ jest równy sumie potencjałów ładunków $+q$ i $-q$, otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \quad (1.169)$$

Jeżeli $r \gg l$ to z rysunku 1.44 wynika, że $\sphericalangle ABC \approx \theta$, $\sphericalangle ACB \approx \pi/2$. Zatem:

$$r_2 - r_1 = BC \approx l \cos \theta. \quad (1.170)$$

Ponadto w mianowniku przedostatniego wzoru można położyć $r_1 \approx r_2 \approx r$. Wówczas otrzymuje się wzór:

$$\varphi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.171)$$

Biorąc pod uwagę, że moment dipolowy $p_e = ql$, ostatni wzór można zapisać

w postaci:

$$\boxed{\varphi = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad (1.172)$$

albo, wprowadzając wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{r}}$, skierowany wzdłuż wektora \mathbf{r} , w postaci:

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}_e \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.173)$$

Składowe natężenia pola elektrycznego dipola można obliczyć z zależności $\mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{E}$. W obecnym przypadku wygodnie jest wyrazić natężenie pola dipola jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, \quad (1.174)$$

gdzie \mathbf{E}_{\parallel} i \mathbf{E}_{\perp} oznaczają odpowiednio składową natężenia pola równoległą i prostopadłą do wektora \mathbf{r} (rys. 1.44). Ponieważ $|\Delta \mathbf{r}_{\parallel}| = \Delta r$ i $|\Delta \mathbf{r}_{\perp}| = r \Delta \theta$, jak wynika z rysunku, otrzymujemy wzory:

$$E_{\parallel} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p_e \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (1.175)$$

$$E_{\perp} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.176)$$

Całkowite natężenie pola elektrycznego dipola wyraża się więc wzorem:

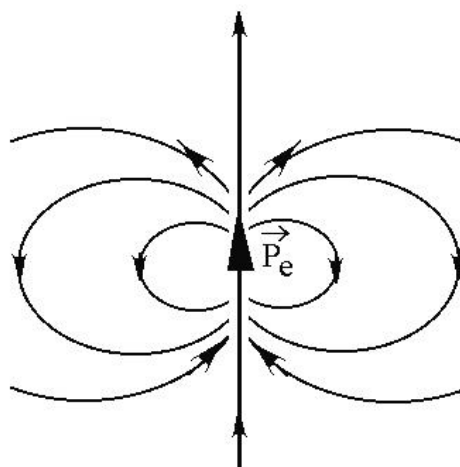
$$E = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}, \quad (1.177)$$

czyli:

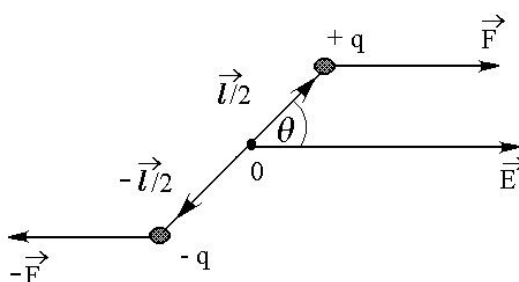
$$\boxed{E = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}. \quad (1.178)$$

Należy zwrócić uwagę, że potencjał i natężenie pola elektrycznego dipola dla ustalonego kierunku maleją z odległością jak $\varphi \sim r^{-2}$ i $E \sim r^{-3}$ podczas gdy w przypadku potencjału i natężenia pola ładunku punktowego zachodzą zależności $\varphi \sim r^{-1}$ i $E \sim r^{-2}$. Jest to spowodowane częściowym kompensowaniem się potencjałów i pól elektrycznych ładunków $+q$ i $-q$, z których składa się dipol. Linie sił pola elektrycznego dipola pokazuje schematycznie rysunek 1.45.

Wypadkowa siła, działająca na dipol umieszczony w zewnętrznym, *jednorodnym* polu elektrycznym jest równa zero, ponieważ siły działające na ładunki $+q$ i $-q$ równoważą się. Natomiast na dipol działa na ogół określony moment skręcający (rys. 1.46). Wyraża się on wzorem:



Rysunek 1.45:



Rysunek 1.46:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{l}}{2} \times \mathbf{F} + \left(-\frac{\mathbf{l}}{2}\right) \times (-\mathbf{F}) = \mathbf{l} \times \mathbf{F} \quad (1.179)$$

(\mathbf{F} i $-\mathbf{F}$ — siły działające na ładunki $+q$ i $-q$). Ponieważ siła

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (1.180)$$

(\mathbf{E} — natężenie zewnętrznego pola elektrycznego), ostatni wzór można przepisać jako:

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times q\mathbf{E} = q\mathbf{l} \times \mathbf{E}, \quad (1.181)$$

czyli, uwzględniając definicję (1.167) momentu dipolowego:

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E}}. \quad (1.182)$$

Liczbowa wartość momentu skracającego dipol wynosi:

$$M = p_e E \sin \theta. \quad (1.183)$$

Widać, że w przypadku gdy dipol jest ustawiony równoległe lub antyrównoległe do kierunku pola (kątem $\theta = 0, \pi$), to wartość momentu $M = 0$. Praca wykonana przez siły elektrostatyczne przy obrocie dipola od początkowego położenia, określonego kątem θ_1 do końcowego położenia określonego kątem θ_2 wynosi:

$$W = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (1.184)$$

(znak „-” wynika z faktu, że przy obrocie dipola kąt θ maleje). Obliczając tę całkę otrzymujemy:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_e E \sin \theta d\theta = -p_e E \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \\ &= p_e E \cos \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = p_e E \cos \theta_2 - p_e E \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (1.185)$$

Pracę W można wyrazić jako:

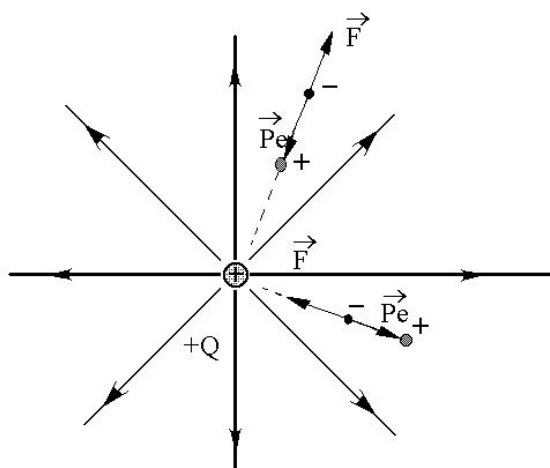
$$W = E_{p1} - E_{p2}, \quad (1.186)$$

gdzie E_{p1} i E_{p2} oznaczają energię potencjalną dipola, nachylonego do kierunku pola pod kątem θ_1 i θ_2 . Energię potencjalną dipola w polu elektrycznym określa więc wzór:

$$E_p = -p_e E \cos \theta, \quad (1.187)$$

który można zapisać w postaci wektorowej jako:

$$\boxed{E_p = -\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}}. \quad (1.188)$$



Rysunek 1.47:

Widać, że energia potencjalna dipola jest minimalna w przypadku, gdy jest on ustawiony zgodnie z kierunkiem pola (wówczas kąt $\theta = 0$) i maksymalna, gdy jest on ustawiony przeciwnie do kierunku pola (kąt $\theta = \pi$).

Zauważymy jeszcze, że gdy dipol znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym, będzie działała na niego określona siła. Zilustrujemy to na przykładzie dipola umieszczonego w polu ładunku punktowego $+Q$ (rys. 1.47). Zależnie od kierunku momentu \mathbf{p}_e dipola, będzie on wówczas przyciągany przez ładunek $+Q$, lub odpychany od niego.

1.12 Ładunki elektryczne na przewodnikach

Zgodnie z podanym wcześniej określeniem, przewodniki są to ciała, w których ładunki elektryczne mogą się swobodnie przemieszczać. Z doświadczenia wiadomo, że przewodnikami są np. metale. Po wprowadzeniu ładunków na dany przewodnik w krótkim czasie rozłożą się one w taki sposób, aby natężenie pola elektrycznego zniknęło w każdym punkcie wewnątrz przewodnika. Gdyby bowiem pole elektryczne wewnątrz przewodnika było różne od zera, powodowałoby ono dalszy ruch ładunków. Z faktu, że wewnątrz przewodnika natężenie pola $\mathbf{E} = 0$ wynikają następujące wnioski:

1. Potencjał elektryczny wewnątrz przewodnika i na jego powierzchni jest stały, $\varphi = \text{const}$. Powierzchnia przewodnika jest więc powierzchnią ekwipotencjalną. Jeżeli bowiem dwa punkty A i B przewodnika połączymy krzywą przebiegającą wewnątrz niego, to całka:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad (1.189)$$

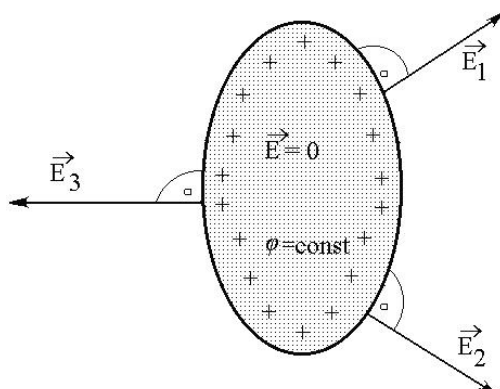
znika, ponieważ $\mathbf{E} = 0$. Zatem $\varphi_A = \varphi_B$.

2. Wektor natężenia pola \mathbf{E} i linie sił pola są prostopadłe do powierzchni przewodnika, ponieważ stanowi ona powierzchnię ekwipotencjalną.
3. Ładunki mogą występować tylko na zewnętrznej powierzchni przewodnika. Gdyby istniał pewien ładunek Q wewnątrz przewodnika, to można byłoby otoczyć go powierzchnią zamkniętą S , przebiegającą całkowicie wewnątrz przewodnika. Stosując do tej powierzchni prawo Gaussa, możemy napisać:

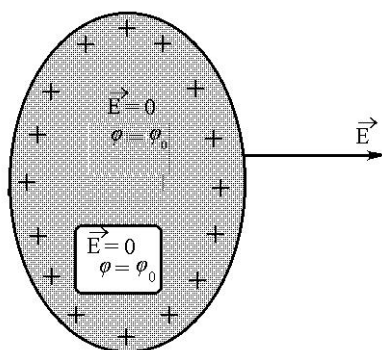
$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (1.190)$$

Ponieważ jednak $\mathbf{E} = 0$ na całej powierzchni S , więc strumień pola przez tę powierzchnię znika, skąd wynika, że $Q = 0$.

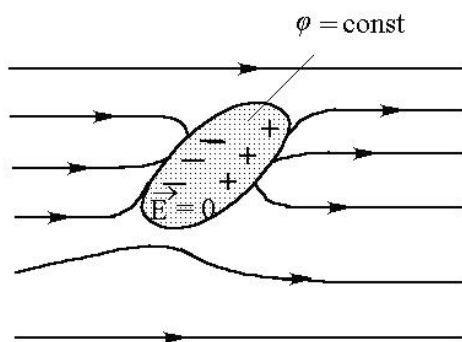
Powyższe stwierdzenia pozostają również słuszne w przypadku, gdy wewnątrz przewodnika istnieją wydrążenia; w szczególności, gdy przewodnik



Rysunek 1.48:

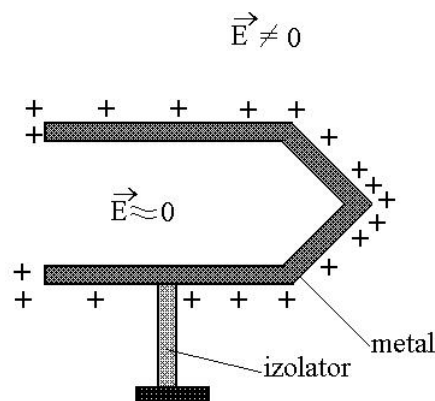


Rysunek 1.49:



Rysunek 1.50:

ma kształt zamkniętej powłoki. Są one też słuszne, gdy przewodnik znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym. Ilustrują to rysunki 1.48 - 1.50.



Rysunek 1.51:

Powierzchniowa gęstość ładunku σ na danym przewodniku jest, jak będzie pokazane w następnym podrozdziale, proporcjonalna do sumarycznego ładunku Q na przewodniku i zależy od kształtu jego powierzchni. Największa gęstość ładunku występuje na najbardziej zakrzywionych fragmentach powierzchni, charakteryzujących się najmniejszym promieniem krzywizny, dotyczy to w szczególności ostrza i występów na powierzchni przewodnika. Przy dużych gęstościach ładunku elektrycznego może on przechodzić z ostrza na otaczające je cząsteczki powietrza, wywołując ich ruch w wyniku odpychania elektrostatycznego ładunków (tzw. „wiatr elektryczny”) lub wyładowanie iskrowe. Zależność gęstości ładunku na przewodniku od kształtu powierzchni pokazuje schematycznie rysunek 1.51.

Korzystając z prawa Gaussa można łatwo podać związek między gęstością powierzchniową ładunku σ i natężeniem pola elektrycznego E w danym punkcie powierzchni przewodnika (rys. 1.52 - 1.53). Ponieważ wewnątrz przewodnika natężenie pola $E = 0$ a na bocznej powierzchni walca kierunek natężenia pola jest równoległy do tworzących powierzchni walcowej, całkowity strumień pola elektrycznego przez powierzchnię narysowanego walca wynosi:

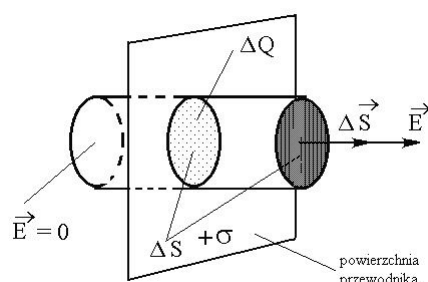
$$\Phi_E = E\Delta S \quad (1.191)$$

Ponieważ ładunek wewnątrz powierzchni walca jest równy

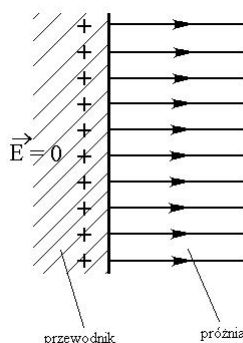
$$\Delta Q = \sigma\Delta S, \quad (1.192)$$

więc, zgodnie z prawem Gaussa:

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}, \quad (1.193)$$



Rysunek 1.52:



Rysunek 1.53:

skąd:

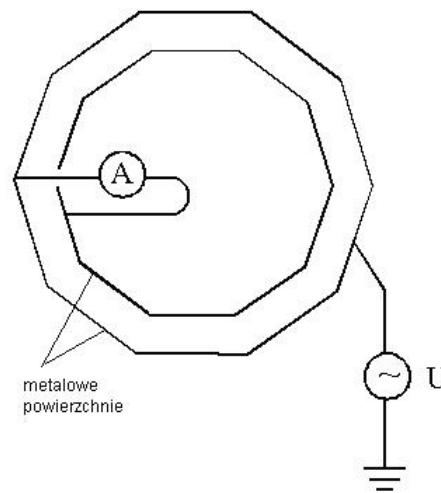
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.194)$$

Natężenie pola E w danym punkcie powierzchni przewodnika jest więc proporcjonalne do gęstości powierzchniowej ładunku σ .

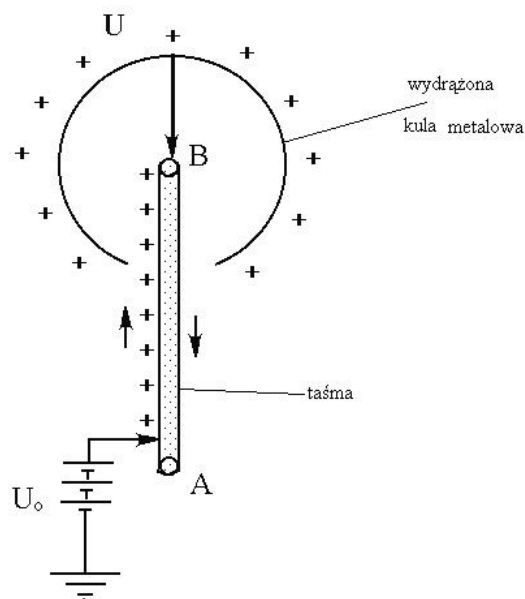
Omówione zjawiska dotyczące ładunków elektrycznych na przewodnikach wykorzystuje się w wielu doświadczeniach oraz przyrządach laboratoryjnych. Poniżej omówimy niektóre z nich.

1. Doświadczalna weryfikacja prawa Coulomba

Jak wspomiano, fakt gromadzenia się ładunków elektrycznych wyłącznie na zewnętrznej powierzchni przewodnika wynika z prawa Gaussa a więc i z prawa Coulomba. Nieobecność ładunku elektrycznego wewnątrz przewodnika stanowi więc dowód słuszności tych praw. Po raz pierwszy wykazał to doświadczalnie H. Cavendish w 1772 r. Cavendish mierzył ładunek wewnętrznej kuli metalowej po odłączeniu od niej zewnętrznej naładowanej powłoki kulistej. Okazało się, że na wewnętrznej kuli nie pozostawał żaden ładunek. Doświadczenie Cavendisha było później powtarzane przez innych



Rysunek 1.54:



Rysunek 1.55:

badaczy, m.in. współcześnie przez E.R. Williamsa, J.E. Fallera, i H.A. Hilla (1971 r.). Schemat ich doświadczenia pokazuje rysunek 1.54.

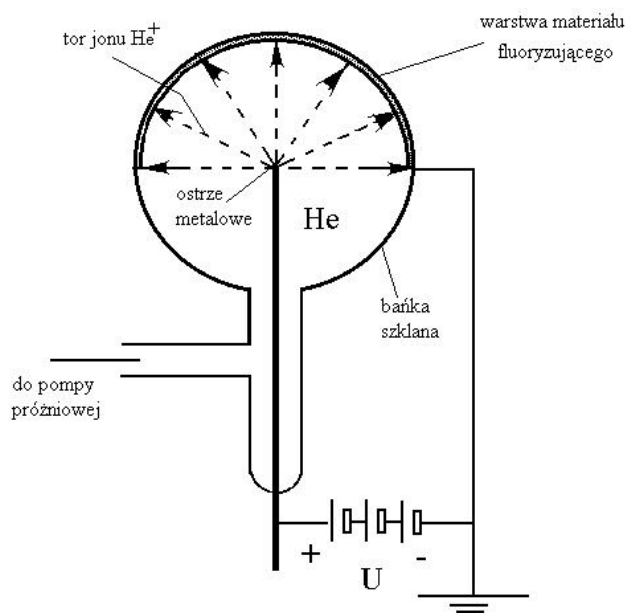
Williams, Faller i Hill mierzyli różnicę potencjałów między dwiema koncentrycznymi powierzchniami metalowymi w sytuacji, gdy do zewnętrznej powierzchni przykładano wysokie zmienne napięcie. Jeżeli przyjąć, że siła oddziaływania dwóch ładunków punktowych różni się nieco od prawa Co-

ulomba, zgodnie z zależnością $F \sim r^{-2 \pm \varepsilon}$, to negatywny wynik ich doświadczenia pozwala stwierdzić, że $\varepsilon < 3 \cdot 10^{-16}$.

2. Generator elektryczny Van de Graaffa

W generatorze Van de Graaffa (1931 r.) korzysta się z faktu, że naładowany przewodnik, wprowadzony do wnętrza wydrążonego przewodnika, przekazuje temu ostatniemu cały swój ładunek. Schemat tego generatora przedstawia rysunek 1.55. Izolująca taśma (jedwabna lub gumowa) porusza się na dwóch krążkach *A* i *B*, osadzonych w odległości do 10 m jeden nad drugim, napędzanych silnikiem elektrycznym. W dolnej części taśma jest ładowana ze źródła wysokiego napięcia $U_0 \approx 100$ kV za pomocą kontaktu ostrzowego. Górna część taśmy wchodzi do wnętrza wydrążonej kuli metalowej, która zbiera ładunek z taśmy poprzez drugi kontakt ostrzowy. Wartość potencjału U kuli względem Ziemi jest ograniczona jedynie wytrzymałością otaczającego ją gazu na przebicie elektryczne. W przypadku zamknięcia generatora Van de Graaffa wewnątrz zbiornika z freonem pod wysokim ciśnieniem można uzyskać napięcie $U \approx 10$ MV. Generatory Van de Graaffa wykorzystuje się w fizyce jądra atomowego do przyspieszania jonów lekkich pierwiastków w polu elektrycznym i badania wywołanych przez nie reakcji jądrowych.

3. Mikroskop polowy



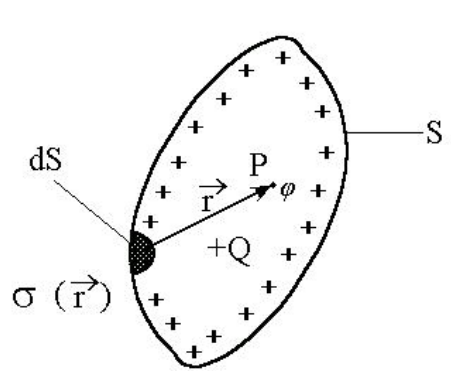
Rysunek 1.56:

W tzw. jonowym mikroskopie polowym, wynalezionym przez E.W. Mullera w 1955 r., wykorzystuje się zjawisko wytwarzania pola elektrycznego o dużym natężeniu przez cienkie ostrza metalowe. Schemat mikroskopu polowego pokazuje rysunek 1.56. Bardzo cienka igła umieszczona jest wewnątrz szklanej kuli, opróżnionej z powietrza i wypełnionej helem pod niskim ciśnieniem. Wewnętrzna powierzchnia kuli pokryta jest cienką warstwą materiału fluoryzującego pod wpływem uderzeń jonów. Między igłą i tą warstwą przyłożone jest wysokie napięcie dodatnie. Pole elektryczne o dużym natężeniu w pobliżu ostrza igły powoduje jonizację otaczających ostrze atomów helu. Posiadający dodatni ładunek jon helu He^+ przyspieszany jest w kierunku punktu fluoryzującego ekranu, odpowiadającemu położeniu atomu na powierzchni ostrza, nad którym nastąpiła jonizacja. W mikroskopie polowym uzyskuje się powiększenia osiągające wartość $2 \cdot 10^6$, co odpowiada jego zdolności rozdzielczej ok. $2,5 \cdot 10^{-10}$ m. W rezultacie, na ekranie fluoryzującym uzyskuje się obraz rozmieszczenia poszczególnych atomów na ostrzu metalowej igły. Obecnie mikroskop polowy jest szeroko stosowany w badaniach powierzchni metali.

1.13 Pojemność elektryczna. Kondensatory

Rozpatrzmy teraz związek między ładunkiem Q przewodnika, znajdującego się w dużej odległości od innych naładowanych ciał i przewodników, a jego potencjałem φ (rys. 1.57). Znajdujący się w przewodniku ładunek rozłoży się na jego powierzchni z określaną gęstością powierzchniową $\sigma(\mathbf{r})$. Charakter rozkładu tego ładunku zależy jedynie od kształtu powierzchni przewodnika. Wynika stąd, że n -krotny wzrost całkowitego ładunku przewodnika spowoduje n -krotny wzrost gęstości powierzchniowej ładunku w każdym punkcie jego powierzchni. Jeżeli na przewodnik wprowadzimy ładunek

$$Q' = nQ, \quad (1.195)$$



Rysunek 1.57:

to powierzchniowa gęstość ładunku w każdym punkcie będzie spełniać zależność:

$$\sigma'(\mathbf{r}) = n\sigma(\mathbf{r}). \quad (1.196)$$

Potencjał φ przewodnika o ładunku Q , rozłożonym z gęstością powierzchniową σ , można obliczyć ze wzoru:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma}{r} dS \quad (1.197)$$

(rys. 1.57; wybór punktu P nie jest istotny, bo wszystkie punkty przewodnika mają jednakowy potencjał). Wyrażając analogicznym wzorem potencjał φ' przewodnika o ładunku Q' i gęstości powierzchniowej ładunku σ' oraz korzystając ze wzoru (1.196) otrzymujemy:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma'}{r} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{n\sigma}{r} dS = n\varphi. \quad (1.198)$$

Widać więc, że potencjał przewodnika jest wprost proporcjonalny do jego całkowitego ładunku, danego wzorem (1.195):

$$\varphi' = n\varphi \quad (1.199)$$

a stosunek ładunku odizolowanego przewodnika do jego potencjału jest wielkością stałą:

$$\frac{Q'}{\varphi'} = \frac{Q}{\varphi}, \quad (1.200)$$

$$\frac{Q}{\varphi} = \text{const.} \quad (1.201)$$

Stosunek ten nazywamy *pojemnością elektryczną* C danego przewodnika:

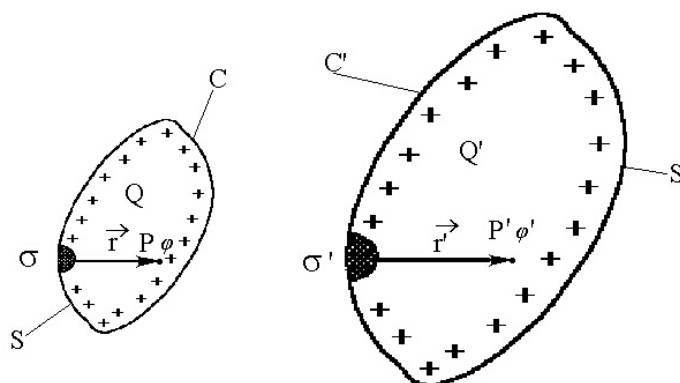
$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi}}. \quad (1.202)$$

Jednostką pojemności elektrycznej jest farad (F):

$$[C] = \frac{\text{C}}{\text{V}} = \text{F}. \quad (1.203)$$

Jeden farad jest więc pojemnością przewodnika, na którym ładunek jednego kulomba wytwarza potencjał jednego volta. Farad jest stosunkowo dużą jednostką pojemności; w praktyce pojemność wyraża się zwykle w podwielokrotnościach farada, np. mikrofaradach ($1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$). Należy zauważyć, że stałą dielektrycznej próżni ϵ_0 można przypisać wymiar:

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{C}^2}{\text{J} \cdot \text{m}} = \frac{\text{C}^2}{\text{C} \cdot \text{V} \cdot \text{m}} = \frac{\text{F}}{\text{m}}. \quad (1.204)$$



Rysunek 1.58:

Pojemność danego przewodnika zależy od jego rozmiarów i kształtu. W przypadku przewodników geometrycznie podobnych jest ona, jak łatwo pokazać, wprost proporcjonalna do ich rozmiarów liniowych. Rozpatrzmy dwa podobne geometrycznie przewodniki o tym samym ładunku Q (rys. 1.58). Jeżeli rozmiary liniowe drugiego przewodnika są n razy większe,

$$r' = nr, \quad (1.205)$$

to:

$$S' = n^2 S, \quad dS' = n^2 dS, \quad (1.206)$$

$$\sigma'(\mathbf{r}') = \sigma(\mathbf{r})/n^2 \quad (1.207)$$

i ze wzoru (1.197) wynika, że:

$$\varphi' = \varphi/n. \quad (1.208)$$

Między pojemnościami elektrycznymi obu przewodników zachodzi więc zależność:

$$C' = \frac{Q}{\varphi'} = \frac{Q}{\varphi/n} = n \frac{Q}{\varphi} = nC. \quad (1.209)$$

Dla przykładu obliczmy pojemność przewodzącej kuli o promieniu r . Ponieważ potencjał na powierzchni kuli o ładunku Q jest identyczny z potencjałem wytworzonym przez ładunek punktowy Q , umieszczony w jej środku (patrz podrozdział 1.5), zachodzi związek:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.210)$$

Zgodnie ze wzorem (1.202) pojemność kuli wynosi:

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.211)$$

i jak należało oczekiwać, jest proporcjonalna do jej promienia. Łatwo obliczyć, że promień kuli o pojemności $C = 1 \text{ F}$ wynosi $r = 9 \cdot 10^9 \text{ m}$!

Dotychczas rozpatrywaliśmy pojemność elektryczną pojedynczego przewodnika, znajdującego się w dużej odległości od innych ciał. Jeżeli w sąsiedztwie danego przewodnika znajdują się inne przewodniki, nawet nienaładowane, to jego pojemność elektryczna ulegnie zmianie. Wynika to z faktu, że potencjał danego przewodnika zależy wówczas nie tylko od znajdującego się na nim ładunku, ale również od ładunków znajdujących się na sąsiednich przewodnikach. Nawet gdy są one nienaładowane, powstanie na nich nierównomierny rozkład ładunków dodatnich i ujemnych w wyniku indukcji elektrostatycznej.

Duże znaczenie praktyczne ma układ położonych blisko siebie przewodników, których ładunki mają jednakowe wartości bezwzględne i przeciwne znaki, $+Q$ i $-Q$. Taki układ dwóch przewodników nazywamy *kondensatorem* (rys. 1.59). Przewodniki, na których znajdują się ładunki, nazywamy natomiast okładkami kondensatora. Podobnie jak w przypadku pojedynczego przewodnika można wykazać, że różnica potencjałów okładek kondensatora $\varphi_A - \varphi_B$ (zakładamy, że $\varphi_A > \varphi_B$) jest proporcjonalna do bezwzględnej wartości Q ładunku, zgromadzonego na każdej z okładek. Różnicę potencjałów dwóch przewodników nazywa się *napięciem* U między tymi przewodnikami:

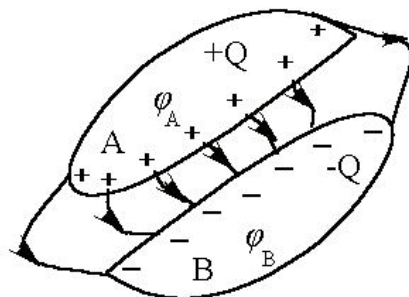
$$U = \varphi_A - \varphi_B, \quad (1.212)$$

$$[U] = \text{V}. \quad (1.213)$$

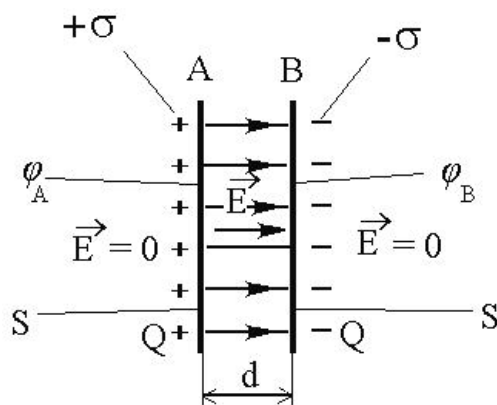
Zatem w przypadku kondensatora stosunek

$$\frac{Q}{U} = \text{const.} \quad (1.214)$$

Pojemność elektryczną C kondensatora określamy jako stosunek bezwzględnej wartości ładunku, znajdującego się na każdej z okładek, do różnicy po-



Rysunek 1.59:



Rysunek 1.60:

tencjałów między okładkami:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}. \quad (1.215)$$

Pojemność kondensatora zależy od kształtu i rozmiarów oraz od względnego położenia jego okładek.

Obliczmy dla przykładu pojemność *kondensatora płaskiego*. Składa się on z dwóch przewodzących, równoległych płytek o powierzchni S każda, umieszczonych w odległości d , małej w porównaniu z liniowymi rozmiarami płytek (rys. 1.60). Można wówczas przyjąć, że pole elektryczne kondensatora jest w przybliżeniu równe sumie pól dwóch nieskończonych płaszczyzn, naładowanych różnoimiennie z gęstością powierzchniową $+\sigma$ i $-\sigma$ (por. podrozdział 1.5). Biorąc pod uwagę kierunki pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki na każdej z okładek można stwierdzić, że na zewnątrz kondensatora całkowite natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E} = 0$ a między okładkami kondensatora natężenie pola jest dwukrotnie większe, niż w przypadku pojedynczej naładowanej płaszczyzny:

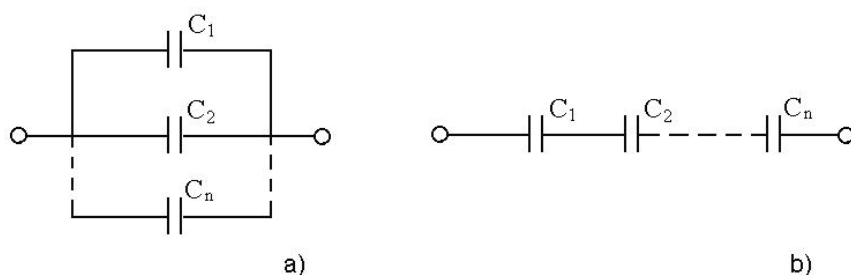
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \quad (1.216)$$

Ponieważ pole elektryczne wewnątrz kondensatora płaskiego jest niemal jednorodne, napięcie $U = \varphi_A - \varphi_B$ między jego okładkami można obliczyć ze wzoru:

$$U = Ed, \quad (1.217)$$

skąd, uwzględniając poprzedni wzór, otrzymujemy:

$$U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}. \quad (1.218)$$



Rysunek 1.61:

Na podstawie definicji pojemności kondensatora (1.215) mamy więc:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (1.219)$$

Przypomnijmy teraz (bez wyprowadzenia) wzory, określające wypadkową pojemność C połączonych ze sobą kondensatorów. Dla ich równoległego połączenia (rys. 1.61a)

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (1.220)$$

a dla połączenia szeregowego (rys. 1.61b)

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (1.221)$$

Zauważymy jeszcze, że dotychczas określaliśmy elektroskop jako przyrząd służący do pomiaru ładunku elektrycznego. Potencjał wewnętrznej części elektroskopu jest jednak proporcjonalny do znajdującego się na nim ładunku. Elektroskop może więc, po odpowiednim wyskalowaniu, służyć do pomiaru potencjału danego ciała. Jeżeli w szczególności obudowa elektroskopu jest uziemiona, elektroskop będzie wskazywał różnicę potencjałów między tym ciałem a Ziemią. Przyrząd taki nazywamy woltomierzem elektrostatycznym.

1.14 Gęstość energii pola elektrostatycznego

W podrozdziale 1.7 podano wzór (1.114), określający energię potencjalną układu ładunków punktowych. Wzór ten można uogólnić na przypadek ciągłego rozkładu ładunków, z jakim mamy do czynienia w przypadku naładowanego przewodnika lub kondensatora. W tym celu zapiszemy go jak

następuje:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{r_{ij}} \right). \quad (1.222)$$

Wyrażenie w nawiasie jest potencjałem pola elektrycznego φ_i wytworzonego przez ładunki q_j ($j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$) w punkcie, w którym znajduje się ładunek q_i :

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{r_{ij}}. \quad (1.223)$$

Ze wzoru (1.222) otrzymujemy więc:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i. \quad (1.224)$$

Ostatni wzór można bezpośrednio uogólnić na przypadek ciągłego rozkładu ładunku. Jeżeli przyjąć, że wszystkie ładunki są rozłożone na pewnej powierzchni S z gęstością powierzchniową $\sigma(\mathbf{r})$, to:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS. \quad (1.225)$$

W przypadku, gdy ładunek znajduje się na pojedynczym przewodniku, jego wszystkie punkty mają ten sam potencjał, $\varphi = const$, co daje:

$$E_p = \frac{1}{2} \varphi \int_S \sigma dS, \quad (1.226)$$

czyli:

$$\boxed{E_p = \frac{Q\varphi}{2}}, \quad (1.227)$$

gdzie

$$Q = \int_S \sigma dS \quad (1.228)$$

jest całkowitym ładunkiem, znajdującym się na przewodniku.

W analogiczny sposób można otrzymać wzór, określający energię potencjalną naładowanego kondensatora. W powyższym wzorze zamiast potencjału φ wystąpi wówczas różnica potencjałów U między okładkami:

$$\boxed{E_p = \frac{QU}{2}}. \quad (1.229)$$

Można postawić pytanie: gdzie zlokalizowana jest energia oddziałujących ładunków elektrycznych? Prawa elektrostatyki nie wystarczają do jednoznacznego rozwiązania tego zagadnienia. Jednak fakt przenoszenia energii przez fale elektromagnetyczne wskazuje, że energia ta jest „zmagazynowana” w polu elektrycznym, wytworzonym przez ładunki.

Zastosujemy teraz ostatni wzór do szczególnego przypadku energii płaskiego kondensatora. Ponieważ $Q = CU$ oraz

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad (1.230)$$

$$U = Ed, \quad (1.231)$$

ze wzoru (1.229) otrzymuje się:

$$E_p = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd, \quad (1.232)$$

czyli, ponieważ $V = Sd$ jest objętością ograniczoną okładkami kondensatora,

$$E_p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V. \quad (1.233)$$

Widać, że energia potencjalna naładowanego kondensatora jest proporcjonalna do objętości, w której natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E} \neq 0$. Wzór ten sugeruje, że energia pola elektrycznego jest rozłożona w przestrzeni z gęstością objętościową

$$w_e = \frac{E_p}{V}, \quad (1.234)$$

równą:

$$\boxed{w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}, \quad (1.235)$$

$$[w_e] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}. \quad (1.236)$$

Wzór ten, jakkolwiek wyprowadzony dla jednorodnego pola elektrycznego, jest słuszny w przypadku pola, wytworzonego przez dowolny układ ładunków. Oznacza to, że energię potencjalną ładunków można zawsze obliczyć, całkując wyrażenie (1.235), określające gęstość energii w_e , po całej objętości w której istnieje pole elektryczne.

