

SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA PROSTYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Piotr Kochański¹, *Centrum Fizyki Teoretycznej PAN i Szkoła Nauk Ścisłych*

Piotr Kortyka², *Szkoła Nauk Ścisłych*

Dla Szkoły Nauk Ścisłych, Warszawa 1999.

Spis rzeczy

1	Wstęp	2
2	Metoda kolejnych przybliżeń	2
3	Równania pierwszego rzędu	4
3.1	Równania o zmiennych rozdzielonych	4
3.2	Równania sprowadzające się do równań o zmiennych rozdzielonych	5
3.2.1	Równanie o „prawie” rozdzielonych zmiennych	5
3.2.2	Równanie jednorodne	6
3.2.3	Uogólnione równanie jednorodne	8
3.2.4	Równania liniowe (pierwszego rzędu)	8
3.2.5	Równanie Bernoulliego	10
3.2.6	Równanie Riccatiego	10
4	Podstawowe typy równań drugiego rzędu	12
5	Równanie liniowe n-tego rzędu	15
6	Równanie liniowe n-tego rzędu o stałych współczynnikach	22
7	Układy równań liniowych o stałych współczynnikach	26
A	Wrońskian i równania liniowe	27
B	Wyliczanie funkcji od operatora	29
B.1	Metoda pierwsza	30
B.2	Metoda druga	32
B.3	Metoda trzecia	33
B.4	Metoda czwarta	36
C	Metoda Rungego-Kutty	36

¹poczta el.: piokoch@cft.edu.pl

²poczta el.: gwaihir@polbox.com

1 Wstęp

W skrypcie przedstawiamy podstawowe sposoby rozwiązywania prostych równań różniczkowych zwyczajnych.

Z założenia koncentrujemy się raczej na praktycznej stronie teorii równań różniczkowych, tak więc czytelnik nie znajdzie tu porządných dowodów twierdzeń czy ścisłych definicji. Pisząc tę pracę chcieliśmy pomóc studentom w połapaniu się w mnogości przeróżnych podstawień i sztuczek służących rozwiązywaniu konkretnych rodzajów równań.

W dodatku B omówiony jest szczegółowo problem liczenia funkcji od operatora, zatem skrypt może być także użyteczny na zajęciach poświęconych temu zagadnieniu.

Skrypt jest przeznaczony dla słuchaczy wykładu z analizy matematycznej pierwszego lub drugiego roku studiów, dlatego jest on napisany możliwie najprościej, wychodząc od najbardziej elementarnych problemów.

W zasadzie ograniczymy się wyłącznie do równań i układów równań liniowych oraz takich, które można do nich prosto sprowadzić. Ponieważ obecnie ważne są w przeróżnych zastosowaniach równania nieliniowe, na końcu omawiamy krótko metody numeryczne służące ich rozwiązywaniu.

W skrypcie zamieściliśmy dużo przykładów, zarówno rozwiązanych jak i pozostawionych do przeliczenia czytelnikowi, mamy nadzieję, że ułatwią one zrozumienie przedstawionej teorii.

Mimo, że na rynku jest wiele podręczników czy zbiorów zadań do analizy to wydaje się, że brak jest czegoś, co można by nazwać „podręcznikiem do ćwiczeń” z równań różniczkowych, w którym omówione byłyby najważniejsze sposoby rozwiązywania równań i układów równań; prezentowany skrypt ma być namiastką takiego opracowania.

Niektóre metody, czy też ich konkretne sformułowanie, są kopią tego, czego nauczył się pierwszy z autorów podczas zajęć z analizy matematycznej na Wydziale Fizyki UW prowadzonych przez dr Grzegorza Cieciorę, w szczególności dotyczy to (bardzo zgrabnej) metody rozwiązywania równań liniowych.

Większość zadań pozostawionych czytelnikowi do rozwiązania wpisał do komputera mgr Daniel Wójcik, co znowóż zostało wykorzystane w pisaniu poniższej pracy.

Skrypt ten powstał z inicjatywy Piotra Kortyki, który też napisał znaczną jego część, za co pierwszy autor jest mu bardzo wdzięczny.

2 Metoda kolejnych przybliżeń

Podstawowym twierdzeniem w teorii równań różniczkowych zwyczajnych jest *twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego* (zwanego czasem *zagadnieniem Cauchy'ego*). Dowód tego twierdzenia jest całkiem prosty i polega, w gruncie rzeczy, na wykazaniu, że pewne chytrze dobrane odwzorowanie jest odwzorowaniem zbliżającym, o ile, rzecz jasna, spełnione są założenia naszego twierdzenia. Wspomniany dowód, który można znaleźć w każdej książce do analizy, jest przy okazji dość użyteczny, bo daje nam prostą (pojęciowo) metodę rozwiązywania równań różniczkowych.

Rozważmy zagadnienie początkowe Cauchy'ego

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

całkując stronami powyższe równanie i uwzględniając warunek początkowy możemy formalnie zapisać rozwiązanie równania jako

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2.2)$$

Rozwiązanie takie jest na pozór dość mało użyteczne, gdyż zarówno po lewej jak i po prawej stronie równości występuje nieznaną (i szukaną) wielkość $x(t)$.

Zdefiniujmy sobie następujące odwzorowanie

$$P_{x_0}(g) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds, \quad (2.3)$$

widzimy, że rozwiązanie równania dane wzorem (2.2) jest punktem stałym odwzorowania $P_{x_0}(g)$, faktycznie $P_{x_0}(x(t)) = x(t)$. Oczywiście udowodnienie tego, że istnieje punkt stały dla naszego odwzorowania wymaga pewnej pracy i prowadzi bezpośrednio do twierdzenia o jednoznaczności... itd.

Dla nas interesujące jest to, że skoro rozwiązanie równia różniczkowego jest tożsame ze znalezieniem punktu stałego pewnego odwzorowania, to możemy posłużyć się znaną dobrze **metodą kolejnych przybliżeń**.

Rozwiązanie równania (2.1) będąc punktem stałym odwzorowania $P_{x_0}(g)$ jest dane jako granica następującego ciągu

$$x(t; t_0, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t; t_0, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{x_0}^n(x_0), \quad (2.4)$$

jeśli tak, to znajdując po kolei wszystkie

$$\begin{aligned} x_0 &:= x(t_0) \\ x_1(t) &= P_{x_0}(x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \\ x_2(t) &= P_{x_0}^2(x_0) = P_{x_0}(x_1) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \\ x_3(t) &= P_{x_0}^3(x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) ds \\ &\vdots \end{aligned}$$

dostajemy szukane rozwiązanie. W praktyce rzadko udaje się znaleźć granicę (2.4) analitycznie, wtedy musimy zadowolić się wynikiem przybliżonym, otrzymanym dla jakiegoś dostatecznie dużego n ; oszacowanie błędu jaki popełniamy „obcinając” ciąg do skończonej ilości wyrazów daje nam oczywiście zasada Banacha. Żeby powyższa teoria stała się jaśniejsza, zróbmy przykład.

Przykład

Metodą kolejnych przybliżeń należy rozwiązać równanie

$$\frac{dx}{dt} = t + x, \quad x(0) = 0,$$

czyli $t_0 = 0$ i $f(t, x) = t + x$

$$\begin{aligned}x_0 &= x(0) = 0, \\x_1(t) &= 0 + \int_0^t s ds = \frac{1}{2}t^2, \\x_2(t) &= 0 + \int_0^t \left(s + \frac{1}{2}s^2\right) ds = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}t^3, \\&\vdots \\x_n(t) &= \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots + \frac{1}{(n+1)!}t^{n+1},\end{aligned}$$

zatem

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = e^t - t - 1.$$

W tym przypadku udało się szczęśliwie wykonać granicę, korzystając z tego, że

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Cóż, nie da się ukryć, że opisana wyżej metoda, mimo swojej prostoty jest raczej mało praktyczna, przejdźmy więc do przedstawienia innych, wygodniejszych sposobów rozwiązywania równań.

Zadania

Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania

1. $\frac{dx}{dt} = -3t^2 x^2$, $x(0) = 1$
2. $\frac{dx}{dt} = y + 2t$, $\frac{dy}{dt} = x - t^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$

3 Równania pierwszego rzędu

W tym rozdziale zajmiemy się równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu, czyli równaniami postaci

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

3.1 Równania o zmiennych rozdzielonych

Równaniem o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x)\psi(y) \tag{3.1}$$

Rozwiązanie ogólne tego równania jest określone (w sposób uwikłany) przez

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \phi(x) dx. \tag{3.2}$$

Reguła rozwiązywania równań tego typu jest bardzo prosta, wystarczy zgrupować wyrazy z „x” po jednej stronie, a wyrazy z „y” po drugiej, następnie scałkować obie strony.

Jest to bardzo wygodna reguła mnemotechniczna, jedynym słabym punktem tej procedury jest „mnożenie przez dx ”, które oczywiście nie ma żadnego matematycznego sensu, gdyż dla nas symbol dx czy dy sam w sobie nic nie znaczy.

Aby jednak uzasadnić prawdziwość stwierdzenia, że (3.2) jest istotnie rozwiązaniem równania (3.1), a co za tym idzie nasz „brutalny” sposób traktowania dx i dy jest dozwolony, użyjemy twierdzenia o funkcji uwikłanej. Niech

$$\frac{d\Psi(y)}{dy} := \frac{1}{\psi(y)}, \quad \frac{d\Phi(x)}{dx} := \phi(x), \quad (3.3)$$

wtedy (3.2) możemy zapisać w postaci $F(x, y) = \text{const}$, gdzie $F(x, y) = \Psi(y) - \Phi(x)$, następnie, korzystając ze wzoru na pochodną funkcji uwikłanej, mamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(y)} = \frac{\phi(x)}{\frac{1}{\psi(y)}} = \phi(x)\psi(y), \quad (3.4)$$

gdzie F'_x, F'_y są pochodnymi cząstkowymi funkcji $F(x, y)$ odpowiednio po x i y .

Wykonując całkę w (3.2) należy pamiętać o pojawiającej się stałej, którą można wyznaczyć znając warunek początkowy; jeśli warunek początkowy nie jest podany, to dostajemy rozwiązanie zależne od stałej dowolnej.

Przykład

Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{dy}{dx} = -xy, \quad y(0) = 1.$$

Równanie bez wątpienia jest równaniem o zmiennych rozdzielonych,

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx x \implies \log(y) = -\frac{x^2}{2} + C,$$

ponieważ stała C jest dowolna, możemy zapisać ją jako $C = \log C_1$, wtedy

$$y(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

na koniec z warunku początkowego wyznaczamy stałą $y(0) = 1 = C_1$.

3.2 Równania sprowadzające się do równań o zmiennych rozdzielonych

Teraz weźmiemy się za równania nieco paskudniejsze, zaczniemy jednak od czegoś przyjemnego.

3.2.1 Równanie o „prawie” rozdzielonych zmiennych

Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = a + \phi(x)\psi(y + ax), \quad (3.5)$$

gdzie a jest stałą. Równanie tego typu sprowadzamy do równania o zmiennych rozdzielonych podstawieniem

$$u(x) = y(x) + ax \implies \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + a, \quad (3.6)$$

wtedy równanie (na funkcję $u(x)$) przybiera postać:

$$\frac{du}{dx} + a = a + \phi(x)\psi(u) \implies \frac{du}{dx} = \phi(x)\psi(u) \quad (3.7)$$

teraz mamy już proste równania o zmiennych rozdzielonych, otrzymujemy z niego $u(x)$ i z (3.6) wyliczymy $y(x)$, co daje nam rozwiązanie naszego równania.

3.2.2 Równanie jednorodne

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.8)$$

nazywamy (dodatnio) jednorodnym względem x i y jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest (dodatnio) jednorodna względem x i y , czyli

$$\forall \lambda > 0 \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Równanie jednorodne sprowadzamy do równanie o zmiennych rozdzielonych podstawieniem

$$y(x) = u(x)x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u$$

Przykład

Każde równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

jest równaniem jednorodnym.

Czasem zdarza się, że mamy do czynienia z równaniem, które wprowadzie bezpośrednio nie jest równaniem jednorodnym, ale się do takowego łatwo sprowadza.

Przyjrzyjmy się równaniu

$$\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right). \quad (3.9)$$

Nietrudno się domyśleć, że dzięki podstawieniu

$$u = y - y_0, \quad v = x - x_0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \quad (3.10)$$

dostaniemy równanie

$$\frac{du}{dv} = \phi\left(\frac{u}{v}\right), \quad (3.11)$$

o którym wiemy, że jest jednorodne.

Okazuje się, że potrafimy dać sobie radę nawet z czymś jeszcze paskudniejszym; rozważmy następujące równanie

$$\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right). \quad (3.12)$$

Aby je sprowadzić do równania jednorodnego zastosujemy następującą sztuczkę:

1. jeżeli $ab_1 - a_1b \neq 0$,

wtedy podstawiamy: $u = y - y_0$; $v = x - x_0$, gdzie x_0 i y_0 są rozwiązaniami następującego układu równań

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \end{cases}$$

wówczas otrzymujemy następujące równanie

$$\frac{du}{dv} = \phi \left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v} \right),$$

które zostało opisane powyżej i wiemy jak sobie z nim dać radę.

2. jeżeli $ab_1 - a_1b = 0$,

obliczamy wtedy jedną ze stałych w zależności od pozostałych i podstawiamy, otrzymując równanie o zmiennych rozdzielonych. Niech, na przykład, $b_1 \neq 0$, wtedy możemy wyrazić a przez pozostałe stałe, dostając

$$\frac{dy}{dx} = \phi \left(\frac{b(a_1x + b_1y) + cb_1}{b_1(a_1x + b_1y) + b_1c_1} \right)$$

i podstawiamy $z(x) = a_1x + b_1y$, wtedy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1} \left(\frac{dz}{dx} - a_1 \right),$$

zatem

$$\frac{1}{b_1} \left(\frac{dz}{dx} - a_1 \right) = \phi \left(\frac{bz + cb_1}{b_1z + b_1c_1} \right),$$

prawa strona tego równania ($\phi(\dots)$) zależy wyłącznie od z , dostajemy więc równanie o zmiennych rozdzielonych.

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y' = \left(\frac{2x - 5y - 1}{x + 2y - 5} \right)^2.$$

Sprawdzamy warunek $ab_1 - a_1b = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) = 9 \neq 0$, więc stosujemy metodę z punktu pierwszego; układ równań na x_0, y_0 można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

stąd $x_0 = 3, y_0 = 1$, zgodnie z podanym przepisem podstawiamy $u = y - 1, v = x - 3$, dostając równanie

$$\frac{du}{dv} = \left(\frac{2v - 5u}{v + 2u} \right)^2.$$

jest to równanie jednorodne, które sprowadzmy do równania o zmiennych rozdzielonych podstawieniem:

$$u(v) = \eta(v)v,$$

czyli

$$\frac{du}{dv} = v \frac{d\eta}{dv} + \eta.$$

Nasze równanie przyjmuje postać:

$$v \frac{d\eta}{dv} + \eta = \left(\frac{2v - 5v\eta}{v + 2v\eta} \right)^2,$$

ponieważ v po prawej równania stronie skraca się, rozwiązanie problemu sprowadza się zatem do policzenia całki

$$\int \frac{(1 + 2x)d\eta}{2 - 6x - 2x^2} = \int \frac{dv}{v}$$

Otrzymujemy ostatecznie:

$$v = (1 - \eta(v))(\eta(v) - 4)^{\frac{5}{2}}(4\eta(v) - 1)^5.$$

Rozwiązanie $y(x)$ znajdujemy korzystając z zależności

$$v = x - 3, \quad \eta = \frac{u}{v} = \frac{y - 1}{x - 3}.$$

3.2.3 Uogólnione równanie jednorodne

Równaniem (dodatnio) jednorodnym stopnia k nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.13)$$

gdzie funkcja f spełnia warunek: $\forall \lambda > 0 \exists k \in \mathbb{R} : f(\lambda x, \lambda^k y) = \lambda^{k-1} f(x, y)$. Oznacza to, że równanie (3.13) ma być niezmiennicze ze względu na następujące skalowanie:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \lambda x \\ y &\mapsto \lambda^k y \\ \frac{dy}{dx} &\mapsto \lambda^{k-1} y. \end{aligned}$$

Szukamy takiego k żeby po dokonaniu powyższego skalowania λ po obu stronach równania skróciła się.

Mając odpowiednie k możemy sprowadzić nasze równanie do równania znanego już typu poprzez podstawienie

$$y(x) = u(x)x^k.$$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y' = \frac{1}{x^2} + y^2.$$

Przypuszczamy, że to równanie jest równaniem jednorodnym odpowiedniego stopnia, sprawdzmy to:

$$\lambda^{k-1} y' = \frac{1}{\lambda^2 x^2} + \lambda^{2k} y^2,$$

na to, żeby λ skróciła się po obu stronach równania potrzeba aby $k-1 = -2$ oraz $2k = -2$. Równania są niesprzeczne, ich rozwiązaniem jest $k = -1$, a więc nasze równanie jest równaniem jednorodnym stopnia $k = -1$. Aby je rozwiązać robimy podstawienie

$$y = \frac{u}{x} \implies y' = \frac{u'x - u}{x^2},$$

które prowadzi do równania o zmiennych rozdzielonych

$$x \frac{du}{dx} = 1 + u + u^2.$$

Rozwiązanie otrzymujemy rozdzielając zmienne i wykonując proste całkowanie

$$\int \frac{du}{1 + u + u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

stąd

$$\log x = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(u + \frac{1}{2} \right) + C.$$

3.2.4 Równania liniowe (pierwszego rzędu)

Równaniem liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \quad (3.14)$$

Liniowość równania oznacza, że funkcja $y(x)$ oraz jej pochodna występują w równaniu w pierwszej potędze.

Równania tego typu rozwiązujemy następująco:

1. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne, czyli równanie

$$\frac{dy}{dx} - a(x)y = 0;$$

niejednorodnością w równaniu różniczkowym nazywamy wszystkie te człony tego równania, które nie zależą od funkcji na którą napisane jest równanie ani od jej pochodnych (czyniąc tym sposobem równanie niejednorodnym). W tym wypadku są to człony niezależne od y i y' . Równanie jednorodne, które otrzymaliśmy, jest prostym równaniem o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązaniem jest

$$y = Ce^{\int a(x)dx} \equiv Cy_0(x), \quad (3.15)$$

gdzie C jest stałą.

Oczywiście na tym jeszcze nie koniec, bo przecież musimy rozwiązać całe równanie, w którym występuje także niejednorodność.

2. Metoda uzmienniania stałej

Aby rozwiązać równanie niejednorodne mając do dyspozycji rozwiązanie równania jednorodnego przyjmujemy, że stała, która występuje w rozwiązaniu równania jednorodnego staje się funkcją zależną od x .

Następnie podstawiamy do równania niejednorodnego postulowane rozwiązanie $y(x) = C(x)y_0(x)$ ($y_0(x)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego znalezionym w poprzednim punkcie, wzór (3.15)) i otrzymujemy tym sposobem równanie na $C(x)$

$$C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) = a(x)C(x)y_0(x) + b(x),$$

czyli

$$C'(x)y_0(x) + C(x)(y_0'(x) - a(x)y_0(x)) = b(x)$$

ale $y_0' - a(x)y_0 = 0$, gdyż y_0 jest rozwiązaniem równania jednorodnego, tym sposobem dostajemy równanie (o zmiennych rozdzielonych) na $C(x)$

$$C'(x) = \frac{b(x)}{y_0} \implies C(x) = \int \frac{dx b(x)}{y_0} = \int dx b(x) e^{-\int^x a(y)dy}, \quad (3.16)$$

Ostatecznie rozwiązanie równania (3.14) dane jest przez

$$y(x) = C(x)y_0 = y_0 \int dx b(x) e^{-\int^x a(y)dy}$$

Proszę zwrócić uwagę, że po wykonaniu całki pojawi się „prawdziwa” stała dowolna.

Przykład

Rozwiązać równanie

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y' + 2xy = 0,$$

otrzymując

$$y_{RJ} = Ce^{-x^2}$$

uzmienniamy stałą $C = C(x)$ i podstawiamy otrzymane rozwiązanie do równania niejednorodnego, wyrazy proporcjonalne do $C(x)$ upraszczają się i dostajemy równanie

$$C'(x) = 2x \implies C(x) = x^2 + C_0.$$

Ostatecznie rozwiązanie naszego równania niejednorodnego dane jest przez

$$y = C(x)e^{-x^2} = (x^2 + C_0)e^{-x^2}.$$

3.2.5 Równanie Bernoulliego

Równaniem Bernoulliego nazywamy równanie

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^n, \quad (3.17)$$

gdzie $n \in \mathbb{R}, n \neq 0, 1$. Równanie to jest oczywiście równaniem nieliniowym. Równanie Bernoulliego sprowadzamy do równania liniowego podstawieniem

$$u = y^{1-n} \implies \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx},$$

dostając

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} = a(x)u + b(x),$$

które rozwiązujemy metodą podaną w poprzednim podrozdziale.

3.2.6 Równanie Riccatiego

Równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (3.18)$$

nazywamy równaniem Riccatiego. Tak jak równanie Bernoulliego jest ono nieliniowe i w ogólnym przypadku nie potrafimy go rozwiązać analitycznie; można je jednak prosto rozwiązać w dwóch przypadkach:

1. jeżeli znamy *jedno* szczególne rozwiązanie naszego równania y_1 , wtedy podstawieniem

$$y = y_1 + \frac{1}{u(x)}$$

sprowadzamy je do równania liniowego.

2. jeżeli znamy *dwa* szczególne rozwiązania naszego równania y_1, y_2 , wtedy problem znalezienia rozwiązania można sprowadzić „do kwadratur”, czyli do policzenia całki. Policzymy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log |y - y_1| &= \frac{y' - y_1'}{y - y_1} = a(y + y_1) + b \\ \frac{d}{dx} \log |y - y_2| &= \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = a(y + y_2) + b \end{aligned}$$

odejmując stronami dwa powyższe równania dostajemy

$$\frac{d}{dx} \log \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| = a(y_1 - y_2),$$

czyli rozwiązanie ogólne jest dane całką

$$\log \left| \frac{y - y_1}{y - y_2} \right| = \int dx a(y_1 - y_2). \quad (3.19)$$

Zadania

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{1+x^2}{t}$,
2. $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{\cos x}$,
3. $t^2 \left(\frac{dx}{dt} - 1 \right) = x(t+x)$,
4. $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{1+t+x}} - 1$,
5. $\frac{dx}{dt} = x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}$,
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x-5}{y-2x-4}$,
7. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y-1}{2x-y-1} \right)^2$,
8. $1 + \frac{1}{y} (2\sqrt{xy} - y) \frac{dy}{dx} = 0$,
9. $(y-x)\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = (1+y^2)^{3/2}$, Wsk. Podstawić $x = \tan \xi$, $y = \tan \eta$
10. $2x \frac{dy}{dx} + y(1+x^2y^4) = 0$,
11. $y' = \frac{1}{x^2} + y^2$,
12. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y^2}$,
13. $6xy^5y' = x^3 + 4y^6$,
14. $xy' - 2y = x^3 \cos x$,
15. $(2x - y^2)y' = 2y$
16. $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$,
17. $y' + (y-x)^2 + 2\frac{y-x}{x} = 1$.
18. $6xy^5y' = x^3 + 4y^6$,
19. $xy' - 2y = x^3 \cos x$,
20. $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$,
21. $2x \frac{dy}{dx} + y(1+x^2y^4) = 0$,
22. $y' = \frac{1}{x^2} + y^2$,
23. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y^2}$,
24. $(2x - y^2)y' = 2y$
25. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x-5}{y-2x-4}$,
26. $y' + (y-x)^2 + 2\frac{y-x}{x} = 1$.
27. $y' + (y-x)^2 + \frac{2}{x}(y-x) = 1$ Wsk. rozwiązaniem szczególnym tego równania jest $y_1 = x$.

4 Podstawowe typy równań drugiego rzędu

Będziemy zajmować się równaniami drugiego rzędu t.j. równaniami postaci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \quad (4.1)$$

Zobaczymy, jak na różne sposoby można takie równania sprowadzić do równań pierwszego rzędu, z którymi lepiej lub gorzej potrafimy sobie radzić.

1. Jeżeli $\partial f/\partial y = 0$, czyli f nie zależy od y , a jedynie od y' i x . Wtedy możemy obniżyć rząd równania przez podstawienie

$$u = \frac{dy}{dx} \implies \frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Widzimy, że zastąpiliśmy równanie drugiego rzędu parą równań pierwszego rzędu:

$$\frac{dy}{dx} = u(x) \quad (4.2)$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, u(x)) \quad (4.3)$$

2. $\partial f/\partial x = 0$, czyli f nie zależy od x . Podstawienie

$$\frac{dy}{dx} = u(y) \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u(y) \frac{du}{dy}$$

znowu pozwala nam zastąpić rozwiązanie równania drugiego rzędu parą równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\frac{dy}{dx} = u(y) \quad (4.4)$$

$$u \frac{du}{dy} = f(y, u(y)) \quad (4.5)$$

3. **Równanie jednorodne** stopnia k względem y, y', y'' .

Dowolne równanie różniczkowe drugiego stopnia można zapisać w postaci

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

jeżeli F ma własność, że

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^k F(x, y, y', y'')$$

mówimy, że mamy do czynienia z równaniem jednorodnym stopnia k względem y, y', y'' . Równanie takie upraszczamy w następujący sposób, podstawiamy

$$y = \pm e^u,$$

gdzie $u(x)$ jest nową funkcją x . Należy pamiętać o rozważeniu obu przypadków podstawienia, „z plusem” i „z minusem”, gdyż nie mamy prawa założyć a priori, że rozwiązanie ogólne będzie dodatnie albo ujemne.

Gdy użyjemy naszego podstawienia dostajemy równanie

$$F(x, \pm e^u, \pm e^u u', \pm e^u (u'' + u'^2)) = 0,$$

a dzięki jednorodności równania czynnik $\pm e^u$ upraszcza się

$$F(x, \pm 1, \pm u', \pm (u'' + u'^2)) = 0,$$

otrzymaliśmy w ten sposób równanie omawiane w punkcie pierwszym tego rozdziału, obniżamy jego rząd poprzez podstawienie $u' = v$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$xy'' = y'.$$

Widzimy, że nasze równanie nie zależy od y , mamy zatem do czynienia z pierwszym typem równania opisanym powyżej; podstawiamy

$$\frac{dy}{dx} = u(x) \implies \frac{du}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

i otrzymujemy równanie

$$x \frac{du}{dx} = u,$$

rozpoznajemy, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, mamy

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},$$

czyli

$$\log u = \log x + C,$$

jak zwykle wygodnie jest przyjąć, że mamy prawo zapisać stałą C jako $C = \log C_1$ dostając

$$u = C_1 x.$$

Teraz przypominamy sobie, że $u = dy/dx$, więc:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x,$$

znowu mamy równanie o zmiennych rozdzielonych, proste całkowanie prowadzi nas do ostatecznego wyniku

$$y(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$yy'' = 2(y')^2.$$

Ponieważ w równaniu brak bezpośredniej zależności od x więc stosujemy podstawienie opisane w drugim punkcie rozdziału

$$\frac{dy}{dx} = u(y), \tag{4.6}$$

mamy stąd

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u(y),$$

podstawiając to do naszego równania dostajemy do rozwiązania proste równania pierwszego rzędu

$$yu \frac{du}{dy} = 2u^2,$$

dzieląc stronami przez u i rozdzielając zmienne dostajemy

$$\int \frac{du}{u} = 2 \int \frac{dy}{y},$$

całkując otrzymujemy

$$u = C_1 y^2$$

Pozostaje tylko wykorzystując (4.6) wyliczyć $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2,$$

czyli naszym końcowym wynikiem jest

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2.$$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$x^2 y y'' = (x y' - y)^2.$$

Ponieważ równanie zależy zarówno od x , jak i y , możemy podejrzewać, że jest ono jednorodne względem y, y', y'' , sprawdźmy to korzystając z metody podanej w trzecim punkcie tego rozdziału:

$$x^2 (\lambda y) (\lambda y'') = (x \lambda y' - \lambda y)^2,$$

ponieważ λ skraca się po obu stronach równania, to istotnie mamy do czynienia z równaniem jednorodnym. Wiemy zatem, że skuteczne będzie podstawienie

$$y = \pm e^u.$$

Zarówno podstawienie $y = +e^u$, jak i $y = -e^u$ prowadzi do

$$\begin{aligned} x^2 e^{2u} ((u')^2 + u'') &= (x e^u u' - e^u)^2, \\ x^2 ((u')^2 + u'') &= (x u' - 1)^2, \\ x^2 u'' &= (1 - 2x u')^2, \end{aligned}$$

widzimy, że dostaliśmy równanie opisane w punkcie pierwszym rozdziału, podstawienie

$$v(x) = \frac{du}{dx} \tag{4.7}$$

sprowadza nam je do równania pierwszego rzędu:

$$x^2 v' + 2xv - 1 = 0.$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne, rozwiążemy je metodą uzmienniania stałej. Najpierw szukamy rozwiązania równania jednorodnego

$$xv' + 2v = 0,$$

rozdzielając zmienne otrzymujemy

$$v_{RJ} = \frac{C}{x^2},$$

teraz uzmienniamy stałą $C = C(x)$ i podstawiamy powyższe rozwiązanie do równania niejednorodnego dostając równanie na $C(x)$

$$x^2 \left(\frac{C' x^2 - 2xC}{x^4} \right) + \frac{2xC}{x^2} = 1,$$

po uproszczeniu mamy

$$\frac{dC}{dx} = 1,$$

czyli

$$C = x + C_1,$$

stąd

$$v(x) = \frac{x + C_1}{x^2},$$

znając zależność (4.7) pomiędzy u i v wyliczmy u

$$u(x) = \int \frac{x + C_1}{x^2} dx,$$

czyli

$$u(x) = \log(x) - \frac{C_1}{x} + C_2,$$

ostatecznie

$$y(x) = \pm \exp\left(\log(x) - \frac{C_2}{x} + C_3\right) = \pm x \exp\left(-\frac{C_2}{x} + C_3\right)$$

Zadania

1. Znaleźć wszystkie ciągle rozwiązania $y(\cdot)$ równania

(a) $y(x) - 2 \int_0^x ty(t) dt = x^2,$

(b) $\int_0^x (x-t-1)y(t)dt = 2x,$

2. Rozwiązać równania

(a) $y'' = 2x \ln x,$

(b) $xy'' = (1 + 2x^2)y',$

(c) $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y^7}, y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}, y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2,$

(e) $y'' = y' \ln y',$

(f) $2yy'' + 2(y')^2 + y^2 = 0$

5 Równanie liniowe n -tego rzędu

Równaniem liniowym n -tego rzędu nazywamy równanie

$$a_0x + a_1x' + a_2x'' + \dots + a_nx^{(n)} = b, \quad (5.1)$$

gdzie $a_0 = a_0(t), \dots, a_n = a_n(t), b = b(t)$ są zadanymi funkcjami, $x(t)$ jest szukaną funkcją. Gdy $b = 0$ mówimy, że równanie jest jednorodne.

Równania liniowe wyróżniają spośród innych następujące użyteczne cechy:

- Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (RORN) jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (RORJ) i dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN):

$$\text{RORN} = \text{RORJ} + \text{RSRN}.$$

- Jeżeli znamy n liniowo niezależnych rozwiązań równania jednorodnego $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, wtedy rozwiązanie ogólne tego równania dane jest przez

$$x_{\text{RORJ}} = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t),$$

gdzie C_i są stałymi.

Przejdziemy teraz do omówienia **metody obniżania rzędu**

Założmy, że znamy r liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych równania jednorodnego $x_1 = x_1(t), \dots, x_r = x_r(t)$ — na przykład udało się je nam jakoś odgadnąć; nie jest to aż takie trudne, bo wystarcza znajomość rozwiązań równania jednorodnego, i to tylko szczególnych.

Wtedy zakładamy, że rozwiązaniem równania niejednorodnego jest

$$x(t) = \sum_{i=1}^r C_i(t)x_i(t), \quad (5.2)$$

gdzie $C_i(t)$ są funkcjami spełniającymi następujący układ równań

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ x_1' & \dots & x_r' \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ Wu(t) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

gdzie W jest *wrońskianem* albo *wyznacznikiem Wrońskiego* zdefiniowanym jako wyznacznik macierzy powyższego układu:

$$W = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ x_1' & \dots & x_r' \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Różne użyteczne własności wrońskianu są opisane w dodatku A; $u(t)$ jest natomiast nową funkcją, którą także musimy znaleźć.

Póki co nie posunęliśmy się zbyt daleko na przód, założyliśmy pewną postać rozwiązania naszego równania, ale występują w nim nieznanne funkcje $C_i(t)$, których pochodne spełniają pewien układ równań, na dodatek pojawiła się jeszcze jedna nieznaną funkcją $u(t)$.

Chytrałość metody polega na tym, że gdy podstawimy nasze rozwiązanie (5.2) do równania niejednorodnego i skorzystamy z warunków (5.3) jakie mamy nałożone na C_i , to dostaniemy równanie różniczkowe rzędu $n - r$ na funkcję $u(t)$, w którym *nie będą* występować nieznanne funkcje C_i . Znając $u(t)$ możemy rozwiązać układ (5.3), a potem przez całkowanie znajdziemy $C_i(t)$.

Zobaczymy więc jak to działa. Żeby podstawić rozwiązanie (5.2) do równania trzeba

policzyć jego wszystkie n pochodnych

$$x = \sum_{i=1}^r x_i(t)C_i(t), \quad (5.4)$$

$$x' = \sum_{i=1}^r x_i'(t)C_i(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^r x_i(t)C_i'(t)}_{=0 \text{ z (5.3)}}, \quad (5.5)$$

$$x'' = \sum_{i=1}^r x_i''(t)C_i(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^r x_i'(t)C_i'(t)}_{=0 \text{ z (5.3)}}, \quad (5.6)$$

$$\vdots \quad (5.7)$$

$$x^{(r)} = \sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t)C_i(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^r x_i^{(r-1)}(t)C_i'(t)}_{=Wu \text{ z (5.3)}}, \quad (5.8)$$

$$x^{(r+1)} = \sum_{i=1}^r x_i^{(r+1)}(t)C_i(t) + \sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t)C_i'(t) + W'u + Wu' \quad (5.9)$$

$$= \sum_{i=1}^r x_i^{(r+1)}(t)C_i(t) + Wu' + 2W'u, \quad (5.10)$$

$$\vdots \quad (5.11)$$

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^r x_i^{(n)}(t)C_i(t) + F(u, u', u'', \dots, u^{(n-r)}), \quad (5.12)$$

licząc pochodne korzystaliśmy konsekwentnie z (5.3), ponadto otrzymując (5.10) wykorzystaliśmy udowodnioną w dodatku A równość

$$\sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t)C_i'(t) = W'u.$$

Jeżeli teraz podstawimy wszystko do rozważanego równania dostaniemy wyrażenie postaci

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r C_i(a_0x_i + a_1x_i' + \dots + a_nx_i^{(n)})}_{=0} + G(u, u', u'', \dots, u^{(n-r)}) = b,$$

gdzie G jest jakąś funkcją, zależną od konkretnej postaci równania. Kluczowym jest spostrzeżenie, że występująca w powyższym równaniu suma jest równa zeru, gdyż x_1, \dots, x_r są rozwiązaniami równania jednorodnego. W rezultacie dostajemy do rozwiązania równanie na $u(t)$ rzędu $(n-r)$ -tego.

Na koniec przyjrzyjmy się pewnym szczególnym przypadkom powyżej opisanej procedury.

1. dla $r = n$ opisany schemat jest znany jako **metoda Lagrange'a uzmienniania stałych**. Postępując zgodnie z podanym przepisem liczymy wszystkie potrzebne pochodne, pamiętając, że dzięki temu, iż C_i spełniają układ (5.3) odpowiednie wyrazy zerują się

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^r x_i(t)C_i(t) \\x' &= \sum_{i=1}^r x'_i(t)C_i(t) \\x'' &= \sum_{i=1}^r x''_i(t)C_i(t) \\&\vdots \\x^{(r)} &= \sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t)C_i(t) + Wu\end{aligned}$$

po czym wstawiamy je do naszego równania $a_0x + a_1x' + a_2x'' + \dots + a_nx^{(n)} = b$ dostając proste równanie algebraiczne na $u(t)$

$$a_n Wu = b.$$

Do rozwiązania pozostaje tylko układ równań

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ x'_1 & \dots & x'_r \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

2. dla $r = n - 1$ otrzymujemy **metodę Liouville'a**. Postępujemy tak jak wyżej, znajdując wszystkie potrzebne pochodne

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^r x_i(t)C_i(t) \\x' &= \sum_{i=1}^r x'_i(t)C_i(t) \\x'' &= \sum_{i=1}^r x''_i(t)C_i(t) \\&\vdots \\x^{(r)} &= \sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t)C_i(t) + Wu \\x^{(r+1)} &= \sum_{i=1}^r x_i^{(r+1)}(t)C_i(t) + Wu' + 2W'u\end{aligned}$$

tym razem dostajemy na $u(t)$ równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\left(a_{n-1} + 2a_n \frac{W'}{W} \right) u + a_n u' = \frac{b}{W},$$

znając $u(t)$ bez problemu znajdujemy C_1, \dots, C_r .

3. wreszcie dla $r = 1$ dostajemy **metodę obniżania rzędu równania o jeden**. W tym wypadku sprawa jest prosta, podstawiamy $x = x_1 C_1$, gdzie C_1 spełnia równanie $x_1 C_1' = W u$, ale w tym przypadku $W = x_1$, tzn. $C_1' = u$, gdy podstawimy wszystko do naszego równania, to C_1 uprości się w równaniu, a ponieważ $C_1' = u$ dostajemy na $u(t)$ równanie $(n - 1)$ -ego rzędu.

Pozostaje tylko zilustrować teorię paroma przykładami, bardzo pouczający jest zwłaszcza pierwszy z nich.

Przykład

Równanie Eulera. Jak widzieliśmy, metoda obniżania rzędu działa skutecznie jeśli potrafimy znajdować rozwiązania równania jednorodnego. Jednym z ważnych równań, dla którego potrafimy znajdować systematycznie rozwiązania równania jednorodnego jest równanie Eulera:

$$a_0 y + a_1 x y' + a_2 x^2 y'' + \dots + a_n x^n y^{(n)} = b(x), \quad (5.14)$$

rozwiązanie równania jednorodnego dostajemy bardzo łatwo podstawiając $y = x^s$; rozwiązując otrzymane równanie algebraiczne na s (n -tego stopnia) otrzymujemy n rozwiązań równania jednorodnego, każde odpowiadające jednemu pierwiastkowi s_i .

Jako przykład weźmy

$$x^2 y'' - 3x y' - 5y = x^2 \log x.$$

Do równania jednorodnego $x^2 y'' - 3x y' - 5y = 0$ podstawiamy przewidywane rozwiązanie $y = x^s$, dostając równanie

$$s^2 - 4s - 5 = 0,$$

którego pierwiastkami są $s_1 = -1$, $s_2 = 5$, mamy zatem dwa liniowo niezależne rozwiązania równania jednorodnego $y_1 = x^{-1}$ oraz $y_2 = x^5$, w związku z czym rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest dane przez

$$y_{\text{RORJ}} = \frac{C_1}{x} + C_2 x^5.$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania niejednorodnego stosujemy metodę obniżania rzędu (w tym wypadku tożsamą z metodą Lagrange'a uzmienniania stałych).

Zakładamy, że rozwiązanie równania niejednorodnego jest dane wzorem

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \quad (5.15)$$

gdzie, zgodnie z podaną metodą, $C_1(x)$ i $C_2(x)$ spełniają układ

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ W u(x) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Możemy też podstawić jawnie wartości $y_1(x)$ i $y_2(x)$:

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & x^5 \\ -x^{-2} & 5x^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ W u(x) \end{pmatrix},$$

aczkolwiek zazwyczaj wygodniej jest w obliczeniach jak najdłużej posługiwać się $y_1(x)$ i $y_2(x)$ bez wstawiania ich konkretnej wartości. Pamiętajmy, że W jest wrońskianem układu, danym przez

$$W = \det \begin{pmatrix} x^{-1} & x^5 \\ -x^{-2} & 5x^4 \end{pmatrix} = 6x^3$$

Teraz podstawiamy naszą założoną postać rozwiązania (5.15) do równania niejednorodnego, korzystamy z tego, że C_1 i C_2 spełniają układ (5.16) i dostajemy równanie (algebraiczne) na $u(x)$:

$$x^2 W u = x^2 \log x,$$

proszę zwrócić uwagę, że w równaniu tym nie ma C_1 i C_2 , dzięki temu właśnie metoda działa; dostajemy więc w końcu

$$u = \frac{\log x}{6x^3}.$$

Znając $u(x)$ możemy z układu (5.16) wyliczyć C_1' i C_2' , po czym przez proste całkowanie znaleźć same C_1 i C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \int (-y_2(x)u(x))dx = \frac{x^3}{54} - \frac{x^3 \log x}{18} + C_{01}, \\ C_2 &= \int y_1(x)u(x)dx = \frac{-1}{54x^3} - \frac{\log x}{18x^3} + C_{02}, \end{aligned}$$

wystarczy teraz uzyskane rozwiązania podstawić do (5.15), dostając ostateczne rozwiązanie

$$y(x) = \frac{C_{01}}{x} + C_{02}x^5 - \frac{x^2 \log x}{9},$$

które, jak zwykle w przypadku równań liniowych jest sumą rozwiązania równania jednorodnego (dwa pierwsze człony) i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Przykład

Rozwiązać równanie

$$x - tx' + (t-1)x'' = (t-1)^2 e^t.$$

Łatwo sprawdzić, że jednym z rozwiązań szczególnych równanie jednorodnego jest $x_1(t) = e^t$. Stosując metodę obniżania rzędu zakładamy rozwiązanie naszego równania w postaci $x(t) = x_1(t)C_1(t)$, gdzie funkcja $C_1(t)$ spełnia zredukowany do jednego równania układ (5.3):

$$x_1(t)C_1'(t) = Wu(t),$$

oczywiście tutaj $W = x_1$, czyli C_1 spełnia warunek $C_1'(t) = u(t)$. Podstawiamy założoną postać rozwiązania $x(t)$ do równania, licząc wprawdzie potrzebne pochodne $x(t)$

$$\begin{aligned} x' &= x_1' C_1 + x_1 C_1' = e^t (C_1 + C_1'), \\ x'' &= x_1'' C_1 + 2x_1' C_1' + x_1 C_1'' = e^t (C_1 + 2u + u'), \end{aligned}$$

dostajemy równanie na $u(t)$ (proszę zauważyć, że skorzystaliśmy z warunku na C_1 : $C_1'(t) = u(t)$, a więc $C_1''(t) = u'(t)$), mamy

$$u(t-2) + u'(t-1) = (t-1)^2.$$

Jest to równanie liniowe, pierwszego rzędu, niejednorodne, rozwiązujemy więc najpierw równanie jednorodne, rozdzielając zmienne mamy

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{(t-2)du}{(t-1)},$$

stąd $u_{RJ} = C_2 e^{-t}(t-1)$. Teraz uzmienniamy stałą $C_2 = C_2(t)$, podstawiamy u_{RJ} do równania niejednorodnego, otrzymując równanie na $C_2(t)$:

$$\frac{dC_2}{dt} e^{-t}(t-1)^2 = (t-1)^2,$$

zatem

$$C_2(t) = e^t + C_{02},$$

Ostatecznie

$$u(t) = (1 + C_{02}e^{-t})(t-1).$$

Możemy teraz powrócić do rozwiązywania naszego pierwotnego problemu, znajdujemy $C_1(t)$:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int u dt = \int (1 + C_{02}e^{-t})(t-1)dt \\ &= \frac{t^2}{2} - t + C_{02}e^{-t}t + C_{03}, \end{aligned}$$

wtedy rozwiązanie naszego równania jest dane wzorem

$$x(t) = C_1 x_1 = e^t \left(\frac{t^2}{2} - t \right) + C_{02}t + C_{03}e^t$$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$t^2 x'' - tx' + x = t,$$

wiedząc, że rozwiązaniami szczególnymi równania jednorodnego są $x_1 = t$ i $x_2 = t \log t$. Oczywiście oba rozwiązania są liniowo niezależne. Wobec tego zakładamy rozwiązanie równania w postaci

$$x(t) = x_1(t)C_1(t) + x_2(t)C_2(t),$$

przy czym funkcje C_1 i C_2 spełniają układ równań

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Wu(x) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Wrońskian W jest wyznacznikiem macierzy układu (5.17):

$$W = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t & t \log t \\ 1 & 1 + \log t \end{pmatrix} = t.$$

Podstawiamy $x(t)$ do równania, korzystamy z tego, że x_1 i x_2 spełniają równanie jednorodne, dzięki czemu w otrzymanym równaniu (na u) nie pojawiają się C_1 i C_2 , otrzymujemy:

$$t^2 Wu = t \quad \text{std} \quad u = \frac{1}{Wt} = \frac{1}{t^2}.$$

Znając u rozwiązujemy układ (5.17), znajdując C_1 i C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= - \int \frac{\log t dt}{t} = - \frac{\log^2 t}{2} + C_{01} \\ C_2 &= \int \frac{dt}{t} = \log t + C_{02} \end{aligned}$$

tak więc ostatecznie

$$x(t) = tC_{01} + tC_{02} \log t + \frac{t \log^2 t}{2}.$$

Przykład

Rozwiązać równanie

$$x - tx' + x'' - tx''' = t,$$

wiedząc, że rozwiązaniami szczególnymi równania jednorodnego są $x_1 = \sin t$ i $x_2 = \cos t$. Zgodnie z metodą obniżania rzędu zakładamy rozwiązanie równania w postaci

$$x(t) = x_1(t)C_1(t) + x_2(t)C_2(t),$$

przy czym funkcje C_1 i C_2 spełniają układ równań

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Wu(x) \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Wrońskian W jest wyznacznikiem macierzy układu (5.18):

$$W = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1.$$

Podstawiamy $x(t)$ do równania, dostając

$$C_1(x_1 - tx_1' + x_1'' - tx_1''') + C_2(x_2 - tx_2' + x_2'' - tx_2''') + u - tu' = t,$$

ponieważ x_1 i x_2 spełniają równanie jednorodne, wyrazy przy C_1 i C_2 są zerem, otrzymujemy zatem równanie na u :

$$u - tu' = t,$$

jest ono liniowe i niejednorodne; jak zwykle w takim przypadku rozwiązujemy równanie jednorodne po czym stosujemy metodę uźmienniania stałej.

Rozwiązaniem równania jednorodnego na u jest $u_{RJ} = Ct$, Uźmienniamy stałą $C = C(t)$, podstawienie u_{RJ} z uźmiennioną stałą prowadzi do równania na $C(t)$:

$$-\frac{dC}{dt}t = 1,$$

stąd

$$C(t) = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + C_0,$$

wtedy

$$u = t(C_0 - \log t).$$

Możemy teraz rozwiązać układ (5.18), znajdując tym samym C_1 i C_2 :

$$C_1(t) = -\int t(C_0 - \log t) \sin t dt,$$

$$C_2(t) = \int t(C_0 - \log t) \cos t dt.$$

Rozwiązanie naszego równania jest dane wówczas jako

$$x(t) = x_1(t)C_1(t) + x_2(t)C_2(t) = C_0 + \sin t \int t \log t \sin t dt - \cos t \int t \log t \cos t dt.$$

Zadania

1. Rozwiązać równania

(a) $2x^2y'' + 3xy' - y = \frac{1}{\sqrt{x}},$

(b) $(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2e^x, y(0) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0,$

(c) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0.$ (znaleźć najpierw rozw. szczeg. w postaci wielomianu)

2. Rozwiązać równania metodą Liouville'a korzystając z podanego rozwiązania szczególnego

(a) $(2t - t^2)x'' + (t^2 - 2)x' = 2(t-1)x, x_1 = t^2$

(b) $(2t + 1)x'' + (4t - 2)x' = 8x, x_1 = e^{-2t}$

(c) $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x, y_2 = 1/x$

6 Równanie liniowe n -tego rzędu o stałych współczynnikach

Równaniem liniowym o stałych współczynnikach nazywamy równanie

$$a_0x(t) + a_1x'(t) + \dots + a_nx^{(n)}(t) = b(t) \tag{6.1}$$

gdzie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ są danymi stałymi a $b(t)$ - daną funkcją.

Oczywiście równanie liniowe o stałych współczynnikach jest szczególnym przypadkiem równania liniowego o dowolnych współczynnikach, zatem metody z poprzedniego rozdziału stosują się bez zmian do równań rozważanych obecnie; okazuje się jednak, że dla równań o stałych współczynnikach można rozwinąć znacznie prostsze metody ich rozwiązywania.

Procedura postępowania jest następująca

Pierwszy krok

Szukamy najpierw rozwiązania ogólnego równania jednorodnego RORJ (tzn. w równaniu (6.1) kładziemy $b = 0$). Aby to zrobić wypisujemy stowarzyszone z naszym równaniem *równanie charakterystyczne*

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n = 0 \quad (6.2)$$

i znajdujemy jego pierwiastki wraz z krotnościami.

Mamy teraz dwie następujące możliwości

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ — pierwiastek rzeczywisty o krotności k . Takiemu pierwiastkowi przyporządkowujemy kombinację liniową k liniowo niezależnych rozwiązań postaci

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

2. $\lambda \in \mathbb{C}$ — pierwiastek zespolony o krotności k . Bierzemy pod uwagę tylko pierwiastki o $\text{Im}(\lambda) > 0$. Takiemu pierwiastkowi przyporządkowujemy kombinację liniową $2k$ liniowo niezależnych rozwiązań postaci

$$t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

gdzie $0 \leq j < k$, i $\lambda = \alpha + i\beta$, czyli $\alpha = \text{Re}(\lambda)$ oraz $\beta = \text{Im}(\lambda)$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ) otrzymujemy poprzez wzięcie kombinacji liniowej rozwiązań dla wszystkich interesujących nas pierwiastków (tzn. rzeczywistych i o części urojonej większej od zera).

Jeśli chcemy rozwiązać równanie niejednorodne możemy w tym momencie posłużyć się metodą z poprzedniego rozdziału. Znamy n liniowo niezależnych rozwiązań równania jednorodnego, zatem metoda obniżania rzędu będzie działać doskonale — ponieważ, zgodnie z notacją z poprzedniego rozdziału, $r = n$ mamy do czynienia z metodą Lagrange'a uzmienniania stałych.

Okazuje się, że dla pewnych typów niejednorodności $b(t)$ jest dość łatwo zgadnąć jak wygląda rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN), w związku z tym stosowanie metody Lagrange'a nie jest potrzebne, co zwalnia nas z konieczności liczenia kilku (czasem paskudnych) całek.

Drugi krok

Podana niżej metoda przewidywania rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN) jest skuteczna tylko dla następujących typów niejednorodności $b(t)$

$$\begin{aligned} b(t) &= W(t)e^{\lambda t}, \\ b(t) &= e^{\alpha t}W(t)\cos(\beta t), \\ b(t) &= e^{\alpha t}W(t)\sin(\beta t), \\ b(t) &= \text{kombinacja powyższych funkcji}, \end{aligned}$$

gdzie $W(t)$ jest wielomianem.

Zróbmy w tym miejscu następujące spostrzeżenie, jeżeli $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \dots + b_n(t)$ i znamy rozwiązania szczególne (RSRN) dla każdej niejednorodności $b_i(t)$ oddzielnie:

$$\begin{array}{lll} x_1(t) & \text{jest RSRN dla} & b_1(t), \\ x_2(t) & \text{jest RSRN dla} & b_2(t), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n(t) & \text{jest RSRN dla} & b_n(t), \end{array}$$

to $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$ jest RSRN dla niejednorodności $b(t)$. Fakt ten zawdzięczamy temu, że nasze równanie jest liniowe.

Teraz zobaczymy jak należy „zgadywać” rozwiązania szczególne dla danych typów niejednorodności.

1. Dla niejednorodności $b(t) = W(t)e^{\lambda t}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego o krotności $k \geq 0$ (*Uwaga:* przyjmujemy konwencję, że $k = 0$ oznacza tyle, że λ po prostu nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego)

Wtedy RSRN przewidujemy w postaci

$$x(t) = t^k V(t) e^{\lambda t}$$

gdzie $V(t)$ jest wielomianem o nieoznaczonych współczynnikach stopnia równego stopniowi wielomianu $W(t)$: $\deg V(t) = \deg W(t)$.

2. Dla niejednorodności $b(t) = e^{\alpha t}(A(t) \cos(\beta t) + B(t) \sin(\beta t))$, gdzie $A(t), B(t)$ są wielomianami RSRN przewidujemy w postaci

$$x(t) = t^k e^{\alpha t} (U(t) \cos(\beta t) + V(t) \sin(\beta t)),$$

gdzie $U(t), V(t)$ są wielomianami takimi, że:

$$\deg U(t) = \deg V(t) = \max\{\deg A(t), \deg B(t)\}$$

zaś k jest krotnością pierwiastka równania charakterystycznego, $\lambda = \alpha + i\beta$; przypominać jeszcze raz o przyjętej konwencji, $k = 0$ oznacza, że liczba λ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.

Przykład

Rozwiązać równanie

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x^{(2)} = te^t + e^t \cos t.$$

Rozwiązujemy w pierw równanie jednorodne. Równaniem charakterystycznym stowarzyszonym z naszym równaniem różniczkowym jest

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0,$$

interesującymi dla nas pierwiastkami (o części urojonej większej od zera i rzeczywistymi) są

$$\begin{array}{ll} \lambda = 0 & \text{o krotnoci } k = 2, \\ \lambda = 1 + i & \text{o krotnoci } k = 1. \end{array}$$

Zatem rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (RORJ) jest

$$x_{\text{RORJ}}(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 t + C_3 e^t \cos t + C_4 e^t \sin t,$$

gdzie $C_1, \dots, C_4 \in \mathbb{R}$ są stałymi.

Przechodzimy do odgadnięcia rozwiązania szczególnego. Widzimy, że mamy do czynienia z dwiema niejednorodnościami, rozważymy je po kolei.

Pierwsza niejednorodność $b_1(t) = te^t$ jest typu $W(t)e^{\lambda t}$, $W(t)$ jest u nas wielomianem pierwszego stopnia, a $\lambda = 1$. Sprawdzamy, czy $\lambda = 1$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, ponieważ nie jest, więc jej krotność $k = 0$, przewidujemy zatem rozwiązanie dla tej niejednorodności w postaci

$$x_1(t) = (at + b)e^t,$$

gdzie a, b są stałymi, które wyznaczamy podstawiając nasze przewidziane rozwiązanie do równania niejednorodnego, dostajemy

$$e^t at + e^t (b + 2a) \equiv te^t$$

ponieważ powyższa równość musi być spełniona tożsamościowo, więc

$$\begin{cases} a &= 1 \\ a + 2b &= 0 \end{cases},$$

czyli $a = 1, b = -2$, co oznacza, że rozwiązaniem szczególnym dla pierwszej niejednorodności jest

$$x_1 = (t - 2)e^t$$

Zajmijmy się teraz drugą niejednorodnością $b_2(t) = e^t \cos t$, jest ona typu $e^{\alpha t}(A(t) \cos(\beta t) + B(t) \sin(\beta t))$, przy czym $A(t) = 1$ (wielomian zerowego stopnia), $B(t) = 0$, $\alpha = 1, \beta = 1$. Sprawdzamy, czy $\alpha + i\beta = 1 + i$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, widzimy, że istotnie jest i ma krotność $k = 1$. Zgodnie z naszym przepisem rozwiązanie szczególne przewidujemy w postaci

$$x_2(t) = t^1 e^t (a \cos(t) + b \sin(t)),$$

gdzie a, b są stałymi (wielomianami zerowego stopnia), które wyznaczamy podstawiając nasze przewidziane rozwiązanie do równania niejednorodnego, dostajemy

$$4e^t (a \cos(t) + b \sin(t)) \equiv e^t \cos(t),$$

ponieważ powyższa równość musi być spełniona tożsamościowo, więc

$$\begin{cases} 4a &= 1 \\ 4b &= 0 \end{cases},$$

czyli $a = \frac{1}{4}, b = 0$, co oznacza, że rozwiązaniem szczególnym dla drugiej niejednorodności jest $x_2 = \frac{1}{4}te^t \cos t$
Rozwiązaniem ogólnym naszego równania jest więc

$$x_{\text{ROBN}} = C_1 + C_2 t + C_3 e^t \cos t + C_4 e^t \sin t + (t - 2)e^t + \frac{1}{4}te^t \cos t.$$

Zadania

Rozwiązać równania

1. $y'' - 2y' + y = 2 + e^x(1 + \sin x)$,
2. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos^2 x + 1$,
3. $y''' + 4y'' + 13y' = x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$,
4. $y^{(4)} = 8y'' - 16y$
5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
6. $y'' - y' = 2(1 - x), y(0) = 1, y'(0) = 3.2$

7 Układy równań liniowych o stałych współczynnikach

Będziemy zajmować się układami równań postaci

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x + b(t), \quad (7.1)$$

z warunkiem początkowym $x_0 = x(t_0)$. $A \in \mathbb{R}^n_n$ jest macierzą kwadratową $n \times n$, a $x(t)$ i $b(t)$ wektorami

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Rozważmy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (7.2)$$

przez bezpośrednie przeliczenie łatwo sprawdzić, że jego rozwiązaniem jest

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

C jest stałym wektorem rzeczywistym, który możemy wyznaczyć mając warunek początkowy, widzimy, że po prostu $C = x_0$.

Rozwiązanie równania niejednorodnego jest nieco bardziej skomplikowane:

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot C(t),$$

gdzie

$$C(t) = \int \exp(-(t - t_0)A) \cdot b(t) dt.$$

Jak widać, głównym problemem jest obliczenie funkcji eksponens od argumentu będącego macierzą: $\exp((t - t_0)A)$; zagadnienie to omawia się zazwyczaj na zajęciach z algebry; w dodatku B przedstawiamy metody obliczania funkcji od macierzy wraz z kilkoma przykładami.

Zadania

Rozwiązać układy równań

- $$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2y \end{cases}$$
- $$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \tan^2 t \\ \tan t \end{pmatrix}$$
- $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y + t^2 \end{cases}$$

$$4. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$5. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = 2y + 7z \\ \dot{y} = 2x + 2z \\ \dot{z} = 7x + 2y \end{cases}$$

Dodatki

A Wrońskian i równania liniowe

W rozdziale poświęconym rozwiązywaniu równań liniowych widzieliśmy, że dość istotną rolę odgrywa tam *wyznacznik Wrońskiego* lub inaczej *wrońskian*. W tym dodatku omówimy kilka przydatnych własności wrońskianu

Niech $x_1(t), \dots, x_n(t)$ będą rozwiązaniami jednorodnego równania liniowego

$$a_0x + a_1x' + a_2x'' + \dots + a_nx^{(n)} = 0,$$

wtedy wrońskian definiujemy jako

$$W(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ x_1' & \dots & x_r' \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

FAKT 1

Jeśli dowolne dwa rozwiązania $x_i(t), x_j(t)$, $i \neq j$ są liniowo zależne, to $W = 0$.

DOWÓD

Fakt ten wynika z własności wyznacznika; jeżeli dwa jego wiersze są liniowo zależne, wtedy jest on równy zeru.

FAKT 2

Zachodzi równość

$$a_{n-1}W + a_n \frac{dW}{dt} = 0$$

DOWÓD

Dowodzimy prawdziwości tego faktu przez proste przeliczenie. Trzeba tylko wiedzieć jak różniczkować wyznacznik

$$\frac{dW}{dt} = \text{suma wyznaczników z kolejno zrniczowanymi wierszami}$$

oraz zauważyć, że w naszym przypadku z tej sumy zostanie tylko wyraz pochodzący ze zrniczowania ostatniego wiersza; w pozostałych przypadkach zrniczowanie wiersza

powoduje, że w wyznaczniku pojawiają się dwa takie same wiersze, czyli

$$\frac{dW}{dt} = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x'_1 & \dots & x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-2)} & \dots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Ponieważ x_1, \dots, x_n są rozwiązaniami równania jednorodnego

$$a_0 x_i + a_1 x'_i + \dots + a_n x_i^{(n)} = 0$$

czyli

$$x_i^{(n)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_i^{(n-1)} - \frac{1}{a_n} (a_0 x_i + a_1 x'_i + \dots)$$

Podstawiając to do równania (A.1) otrzymujemy:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot W.$$

FAKT 3

Zgodnie z notacją z rozdziału 5 przyjmijmy, że mamy r liniowo niezależnych rozwiązań równania jednorodnego, wtedy zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t) C'_i(t) = W' u.$$

gdzie, przypomnijmy, C_i są funkcjami spełniającymi następujący układ równań

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ x'_1 & \dots & x'_r \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ W u(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Dowód

Po pierwsze zauważmy, że układ (A.2) można łatwo rozwiązać stosując wzory Cramera, faktycznie

$$C'_i = (-1)^{r+i} W(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_r),$$

gdzie $W(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_r)$ oznacza wrońskian z wyrzuconą i -tą kolumną i r -tym wierszem. Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t) C'_i(t) &= \sum_{i=1}^r x_i^{(r)}(t) (-1)^{r+i} \begin{vmatrix} x_1 & \dots & \hat{x}_i & \dots & x_r \\ x'_1 & \dots & \hat{x}'_i & \dots & x'_r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(r-2)} & \dots & \hat{x}_i^{(r-2)} & \dots & x_r^{(r-2)} \end{vmatrix} u \\ &= W' u, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy ze wzoru na pochodną wrońskianu wypisanego przy okazji dowodu drugiego faktu; pionowe kreski po obu stronach macierzy oznaczają jej wyznacznik, a \hat{x}_i oznacza, że wyrzucamy z macierzy i -tą kolumnę.

B Wylizanie funkcji od operatora

Rozwiązując układy równań liniowych widzieliśmy, że zagadnienie to sprowadza się do policzenia eksponensu od macierzy. Zazwyczaj problem ten omawia się na zajęciach z algebry, niemniej przedstawimy tutaj skrótowo cztery metody obliczania eksponensu od macierzy, lub ogólniej, dowolnej funkcji (analitycznej) od macierzy.

Pierwsza metoda, jaką będziemy się zajmować, jest prostrza od pozostałych w tym sensie, że wymaga minimalnej wiedzy z algebry. Pozostałe metody są bardziej wyrafinowane, wydaje się, że najlepszą z nich jest trzecia — jest mało pracochłonna, nie wymaga wielu obliczeń, stosując ją trudno się pomylić. Czwarta metoda jest szczególnie lubiana przez fizyków, mimo, że zakres jej stosowania ograniczony jest do macierzy diagonalizowalnych, tak się jednak składa, że właśnie te macierze natura polubiła szczególnie.

Zanim przejdziemy do opowiedzenia o konkretnych sposobach liczenia funkcji od macierzy przypomnimy sobie kilka pojęć i faktów z algebry.

Często mówi się, że obliczymy funkcję nie od macierzy, a od *operatora liniowego*, czyli odwzorowania liniowego przestrzeni wektorowej w samą siebie $L(V, V)$. Takie odwzorowania nazywamy *endomorfizmami* $L(V, V) = \text{End}(V)$. Jak wiadomo z algebry każdy operator liniowy w skończenie wymiarowej przestrzeni $\dim V = n$ można przez wybór pewnej bazy reprezentować jako macierz $n \times n$. Jeżeli $F \in \text{End}(V)$, a przez e oznaczymy bazę w przestrzeni wektorowej, to $[F]^e_e = A$, gdzie $A \in \mathbb{K}^n_n$, a \mathbb{K} jest ciałem przestrzeni wektorowej. Można zatem myśleć o operatorach liniowych jak o macierzach. Wszystkie te wyjaśnienia są po to, aby czytelnik zaglądając do książki od algebry nie wystraszył się od razu tych wszystkich dziwnych słów i nazw.

Przejdziemy teraz do omówienia najważniejszego z naszego punktu widzenia twierdzenia.

TWIERDZENIE (O rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe)

Dla każdej macierzy A (kwadratowej stopnia n) w przestrzeni wektorowej \mathbb{C}^n istnieje k podprzestrzeni wektorowych $V(\lambda_i) \subset \mathbb{C}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$, gdzie k jest ilością różnych wartości własnych macierzy A . Podprzestrzenie te nazywamy *przestrzeniami pierwiastkowymi*. Przestrzenie pierwiastkowe $V(\lambda_i)$ mają następujące własności:

1. $AV(\lambda_i) \subset V(\lambda_i)$ — przestrzenie $V(\lambda_i)$ są niezmiennicze,
2. $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$ $i \neq j$ — przestrzenie są rozłączne,
3. $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ — cała przestrzeń jest sumą prostą przestrzeni pierwiastkowych.
4. $V(\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i)^{k_i} \equiv \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda_i)^{k_i}v = 0\}$, gdzie λ_i jest wartością własną macierzy, lub, równoważnie, pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. W ten sposób mamy przepis na szukanie przestrzeni pierwiastkowych; k_i jest krotnością pierwiastka λ_i wielomianu charakterystycznego macierzy.
5. $\dim V(\lambda_i) = k_i$.

Ważnym spostrzeżeniem jest to, że z punktu 2 i 3 wynika, iż każdy wektor $v \in \mathbb{C}^n$ można

jednoznacznie rozłożyć na sumę wektorów z podprzestrzeni $V(\lambda_i) \ni v_i$

$$v = \sum_{i=1}^k v_i.$$

Powyżej pojawiło się znane czytelnikowi z kursu algebry pojęcie wielomianu charakterystycznego macierzy A , który jest zdefiniowany jako $w_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. W przypadku macierzy większych rozmiarów albo o skomplikowanych wyrazach warto używać innej, równoważnej metody znalezienia wielomianu charakterystycznego:

$$\begin{aligned} w_A(\lambda) &= \lambda^n - \tau_1(A)\lambda^{n-1} + \tau_2(A)\lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \tau_n(A) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \tau_j(A) \lambda^{n-j}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tau_0(A) &= 1, \\ \tau_1(A) &= \text{Tr}(A), \\ \tau_2(A) &= \sum_{i < j}^n \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \text{suma wszystkich minorów gównych drugiego rzędu} \\ &\vdots \\ \tau_k(A) &= \text{suma wszystkich minorów gównych } k\text{-tego rzędu}, \\ &\vdots \\ \tau_n(A) &= \det(A), \end{aligned}$$

Jesteśmy teraz gotowi omówić pierwszą z metod liczenia eksponensu od macierzy.

B.1 Metoda pierwsza

Przedstawiona metoda pozwoli nam znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych. Z rozdziału 7 pamiętamy, że rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach dane jest przez

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot x_0, \tag{B.1}$$

gdzie, $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ jest warunkiem początkowym. Nasze zadanie polega na znalezieniu eksponensa od macierzy.

Po pierwsze rozłożmy wektor x_0 na wektory należące do przestrzeni własnych, co, jak wynika z przytoczonego wyżej twierdzenia, jest zawsze możliwe:

$$x_0 = \sum_{i=1}^k v_i,$$

$v_i \in V(\lambda_i)$ jest elementem i -tej przestrzeni pierwiastkowej; korzystając z tożsamości

$$\exp((t - t_0)A) = \exp((t - t_0)\lambda_i I) \exp((t - t_0)(A - \lambda_i I)),$$

gdzie I jest jednością w przestrzeni $\text{End}(V)$, lub, mówiąc po ludzku, macierzą jednostkową. Używając dwóch powyższych wzorów możemy zapisać rozwiązanie naszego układu równań w następującej postaci

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot \sum_{i=1}^k v_i = \sum_{i=1}^k \exp((t - t_0)\lambda_i I) \exp((t - t_0)(A - \lambda_i I)) \cdot v_i.$$

Teraz rozwijamy w szereg Taylora funkcję eksponens, otrzymując

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \exp((t - t_0)\lambda_i I) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i I)^j \cdot v_i.$$

Z punktu 4 naszego twierdzenia wynika, że

$$(A - \lambda_i I)^j \cdot v_i = 0 \quad \text{dla } j \geq k_i,$$

zatem szereg się urywa i mamy ostatecznie

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \exp((t - t_0)\lambda_i I) \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{(t - t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i I)^j \cdot v_i. \quad (\text{B.2})$$

Przedstawiona metoda jest faktycznie niezwykle prosta i natychmiast daje rozwiązanie równania. Ktoś ambitniejszy może odczuwać pewien niedosyt, gdyż tak na prawdę nie wyliczyliśmy samego eksponensa od macierzy, tylko eksponens w działaniu na pewien wektor. Jednak z tego co dotychczas widzieliśmy łatwo się domyśleć w jaki sposób otrzymać ogólniejszy wynik.

Przykład

Rozwiązać równanie

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \quad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gdzie macierz A jest równa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$x(t) = \exp(tA) \cdot x_0. \quad (\text{B.3})$$

Rozwiązanie rozpoczynamy od znalezienia wartości własnych A wraz z ich krotnościami, znajdujemy wielomian charakterystyczny

$$w_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2,$$

czyli mamy $\lambda_1 = 1$ o krotności $k_1 = 1$, któremu odpowiada przestrzeń pierwiastkowa $V(1)$, $\dim V(1) = 1$ oraz $\lambda_2 = -1$ o krotności $k_2 = 2$, któremu odpowiada przestrzeń pierwiastkowa $V(-1)$, $\dim V(-1) = 2$.

Musimy teraz znaleźć obie przestrzenie pierwiastkowe:

$$V(1) = \ker(A - I) = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - I)v = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

oraz

$$V(-1) = \ker(A + I)^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A + I)^2 v = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

gdzie łamane nawiasy $\langle \dots \rangle$ po obu stronach wektorach oznaczają przestrzeń rozpiętą na wektorze (wektorach), czyli taką, która jest ich dowolną kombinacją liniową.

Teraz możemy rozłożyć warunek początkowy na sumę wektorów należących do przestrzeni pierwiastkowych:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pierwszy wektor $v_1 = (1, 2, -1)$ jest z przestrzeni $V(1)$, drugi zaś, $v_2 = (0, -2, 2)$ jest z przestrzeni $V(-1)$. Nie pozostaje już nic innego jak tylko wykorzystać wynik (B.2)

$$x(t) = e^t I \cdot v_1 + e^{-t} (I + t(A + I)) \cdot v_2 = \begin{pmatrix} e^t + 2te^{-t} \\ 2e^{-t}(t-1) + 2e^t \\ 2e^{-t}(1-t) - e^t \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Metoda druga

W tym rozdziale pokażemy jak można policzyć wartość dowolnej funkcji analitycznej od argumentu macierzewego.

Rozważmy funkcję analityczną $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ zadaną szeregiem w otoczeniu każdej wartości własnej λ_i macierzy A , to znaczy

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (\lambda - \lambda_i)^j,$$

gdzie $\varphi^{(j)}(\lambda_i)$ jest, jak zwykle, j -tą pochodną funkcji $\varphi(\lambda)$

Niech P_i będzie rzutem na $V(\lambda_i)$ ($V(\lambda_i)$ jest przestrzenią pierwiastkową odpowiadającą wartości własnej λ_i), z algebry wiemy, że $V(\lambda_i) = \text{im} P_i$, gdzie $\text{im} P_i$ oznacza obraz rzutu P_i . Dla przypomnienia: $\text{im} P_i := \{P_i v : v \in V\}$. Tak zdefiniowaną funkcję można sensownie rozszerzyć do funkcji argumentów macierzewych, czyli możemy liczyć $\varphi(A)$, co właśnie jest naszym celem.

Ponieważ $V(\lambda_i)$ jest przestrzenią niezmienniczą dla A (patrz punkt 1 twierdzenia) to

$$(AP_i)^j = A^j P_i,$$

a zatem

$$\varphi(A)P_i = \varphi(AP_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (AP_i - \lambda_i P_i)^j,$$

z punktu 4 twierdzenia wiemy jednak, że

$$(AP_i - \lambda_i P_i)^j = 0 \text{ dla } j \geq k_i,$$

dostajemy więc

$$\varphi(A)P_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (AP_i - \lambda_i P_i)^j = \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (A - \lambda_i I)^j P_i.$$

Korzystając z tego, że P_i są operatorami rzutowymi i $\sum_{i=1}^k P_i = I$ mamy ostatecznie

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (A - \lambda_i I)^j P_i. \quad (\text{B.5})$$

Widać, że opisana tu metoda jest bardzo podobna do tej z poprzedniego rozdziału, a dokładnie pierwsza metoda jest szczególnym przypadkiem metody opisanej powyżej. Jeżeli chcielibyśmy liczyć eksponens od macierz drugą metodą to wystarczy wziąć za $\varphi^{(j)}(\lambda_i)/j!$ współczynnik rozwinięcia w szereg funkcji eksponens. W pierwszej metodzie pierwszym krokiem było „rozłożenie” wektora warunku początkowego x_0 na sumę wektorów $V(\lambda_i)$ należących do kolejnych przestrzeni własnych $V(\lambda_i)$, w drugiej metodzie nie robimy tego „ręcznie”, a zatrudniamy do tego operatory rzutowe P_i , rzeczywiście $v_i = P_i x_0$

Przykład

Rozważymy ten sam przykład co w poprzednim rozdziale, tym razem znajdziemy jednak samo $\exp(tA)$. Większość pracy wykonaliśmy już poprzednio, trzeba znaleźć tylko jeszcze rzuty na podprzestrzenie pierwiastkowe. Aby to zrobić znajdziemy rozkład bazy standardowej (e_1, e_2, e_3) na wektory należące do przestrzeni pierwiastkowych.

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V(-1), \quad e_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in V(1)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V(-1)}, \\ e_3 &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in V(1)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in V(-1)}, \end{aligned}$$

Teraz operatory rzutujące na $V(1)$ i $V(-1)$ znajdziemy bez problemu; są one macierzami, których kolumny są wektorami rozkładu kolejnych elementów bazy standardowej $\{e_i\}$:

$$P_{V(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{V(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

podstawiając do wzoru (B.5) współczynniki rozwinięcia w szereg eksponensu dostajemy

$$\exp(tA) = e^t I P_{V(1)} + e^{-t} (I + t(A + I)) P_{V(-1)} = \begin{pmatrix} e^{-t}(t+1) & e^t - e^{-t} & e^{-t}(t-1) + e^t \\ te^{-t} & 2e^t - e^{-t} & e^{-t}(t-2) + 2e^t \\ -te^{-t} & e^{-t} - e^t & e^{-t}(2-t) - e^t \end{pmatrix}$$

B.3 Metoda trzecia

Przechodzimy wreszcie do opisanie trzeciej metody liczenia funkcji od macierzy, jest ona najprostrza rachunkowo, ale wymaga znajomości paru dodatkowych faktów z algebry. Zdefiniujemy przestrzenie wektorowe $V_l(\lambda)$ wzorem

$$V_l(\lambda) := \ker(A - \lambda I)^l.$$

Tak zdefiniowana przestrzeń ma następujące własności:

1. $V_1(\lambda) \subseteq V_2(\lambda) \subseteq V_3(\lambda) \subseteq \dots$

2. $\exists h = h(\lambda) \in \mathbb{N} : V_h(\lambda) = V_{h+1}(\lambda) = V_{h+2}(\lambda) \dots$, mówimy wtedy, że przestrzenie się stabilizują; liczbę h nazywamy *wysokością przestrzeni pierwiastkowej*. Ponadto mamy

$$V_l(\lambda) \subsetneq V_h \text{ dla } l < h, \quad (\text{B.6})$$

w konsekwencji

$$\dim V_l(\lambda) < \dim V_h \text{ dla } l < h. \quad (\text{B.7})$$

Oczywiście czytelnik domyśla się, że jeżeli λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego to $V_h(\lambda)$ jest przestrzenią pierwiastkową $V_h(\lambda) \equiv V(\lambda)$, w związku z tym

$$1 \leq h(\lambda) \leq k(\lambda),$$

gdzie $k(\lambda)$ jest krotnością λ .

Warto zauważyć tutaj pewną subtelność, otóż widzimy, że przestrzeń pierwiastkową można znajdować mniejszym nakładem pracy, poprzednio aby ją wyliczyć dla jakiejś wartości własnej λ_i szukaliśmy $\ker(A - \lambda_i I)^{k_i}$, gdzie k_i jest krotnością λ_i . Jak wynika z powyższych rozważań, żeby znaleźć przestrzeń pierwiastkową wystarczy policzyć $\ker(A - \lambda_i I)^{h_i}$ ($h_i \equiv h(\lambda_i)$); jeżeli $h(\lambda_i) < k(\lambda_i)$, to oszczędzamy na mnożeniu macierzy.

Uzbrojeni w przedstawioną teorię możemy przystąpić do liczenia funkcji od macierzy, tak jak w poprzednich rozdziałach interesuje nas wyliczenie

$$\varphi(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (A - \lambda_i I)^j,$$

aby to osiągnąć potrzebny jest następujący

FAKT

Niech $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ będzie widmem (zwanym czasem spektrum) macierzy A (widmo to zbiór wartości własnych macierzy A), każdej wartości własnej odpowiada przestrzeń pierwiastkowa o wysokości

$$h_1 = h(\lambda_1), h_2 = h(\lambda_2), \dots, h_r = h(\lambda_r).$$

Jeżeli $\tilde{\varphi}$ jest pewną funkcją analityczną określoną na otoczeniu $\text{Sp}(A)$, na przykład wielomianem, takim, że

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda_1) &= \varphi(\lambda_1), \quad \dots, \quad \tilde{\varphi}^{(h_r-1)}(\lambda_1) &= \varphi^{(h_r-1)}(\lambda_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\varphi}(\lambda_r) &= \varphi(\lambda_r), \quad \dots, \quad \tilde{\varphi}^{(h_r-1)}(\lambda_r) &= \varphi^{(h_r-1)}(\lambda_r), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

wtedy

$$\varphi(A) = \tilde{\varphi}(A).$$

Wielomian $\tilde{\varphi}(\lambda)$ nazywamy *wielomianem interpolacyjnym* dla φ . Ponieważ mamy $h_1 + \dots + h_r$ warunków na $\tilde{\varphi}(\lambda)$ musi on być stopnia $(h_1 + \dots + h_r) - 1$ (o jeden mniejszego od ilości warunków).

Schemat liczenia funkcji od macierzy jest zatem bardzo prosty,

1. znajdujemy wartości własne naszej macierzy i ich krotności,
2. znajdujemy wysokości przestrzeni pierwiastkowych odpowiadających kolejnym wartościom własnym,
3. zakładamy, że wielomian interpolacyjny jest postaci

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_d\lambda^d,$$

gdzie $d := (h_1 + \dots + h_r) - 1$

4. wyznaczamy współczynniki wielomianu a_i z warunków (B.8),
5. wreszcie liczymy

$$\varphi(A) = \tilde{\varphi}(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_dA^d.$$

Przykład

Zróbmy nasz przykład z rozdziału A.1 trzecią zaprezentowaną metodą:

Pierwszym krokiem jest znalezienie wartości własnych, ponieważ zrobiliśmy to już wcześniej, przypomnijmy tylko, że $\lambda_1 = 1$ ma krotność $k_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ ma krotność $k_2 = 2$.

Następnie znajdziemy wysokości odpowiednich przestrzeni pierwiastkowych. Przestrzeń pierwiastkowa odpowiadająca pierwszej wartości własnej ma oczywiście wysokość równą jeden, gdyż wysokość nie może być liczbą większą niż krotność pierwiastka i musi być większa od zera, $h_1 = 1$. Jaka jest wysokość drugiej przestrzeni pierwiastkowej? Policzymy

$$V_1(-1) = \ker(A + I) = \left\langle \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle,$$

widzimy, że $\dim V_1(-1) = 1$, a z definicji przestrzenie pierwiastkowej wiemy, że jej wymiar musi być równy krotności pierwiastka (u nas jest to 2), czyli $V_1(-1)$ nie może być przestrzenią pierwiastkową. Z kolei z podanych w bieżącym rozdziale własności wysokości przestrzeni wiemy, że $\dim V_h(-1) > \dim V_1(-1)$, czyli $h(-1) > 1$, z drugiej strony pamiętamy, że $h(-1) \leq k(-1) = 2$, zatem $h(-1) \equiv h_2 = 2$.

Przechodzimy do trzeciego punktu przepisu, ponieważ $h_1 + h_2 - 1 = 2$, więc wielomian interpolacyjny musi być wielomianem drugiego stopnia:

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

gdzie stałe a, b, c wyznaczamy z warunków (B.8):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(1) &= a + b + c = \varphi(1) = e^t, \\ \tilde{\varphi}(-1) &= a - b + c = \varphi(-1) = e^{-t}, \\ \tilde{\varphi}'(-1) &= 2a + b = \varphi'(-1) = te^{-t}, \end{aligned}$$

dostajemy:

$$a = \frac{e^{-t}}{4} (1 + 2t - e^{2t}), \quad b = \frac{e^{-t}}{2} (e^{2t} - 1), \quad c = \frac{e^{-t}}{4} (1 - 2t + 3e^{2t}).$$

Ostatecznie mamy

$$\exp(At) = \tilde{\varphi}(A) = \begin{pmatrix} e^{-t}(t+1) & e^t - e^{-t} & e^{-t}(t-1) + e^t \\ te^{-t} & 2e^t - e^{-t} & e^{-t}(t-2) + 2e^t \\ -te^{-t} & e^{-t} - e^t & e^{-t}(2-t) - e^t \end{pmatrix}.$$

B.4 Metoda czwarta

Tak jak poprzednio chcemy policzyć $\exp((t - t_0)A)$. Tym razem założymy jednak, że macierz A jest *diagonalizowalna*. Oznacza to, że jeżeli A jest macierzą $n \times n$, to ma n różnych wartości własnych. Innymi słowy, wszystkie przestrzenie pierwiastkowe A są jednowymiarowe, są zatem równe przestrzeniom własnym. Warto pamiętać, że w szczególności każda macierz symetryczna (lub hermitowska) jest diagonalizowalna.

Jeżeli macierz A jest diagonalizowalna, to istnieje operator liniowy (czyli macierz, gdy wybierzemy konkretną bazę) U taki, że

$$U^\dagger A U = D, \quad (\text{B.9})$$

gdzie D jest macierzą diagonalną. Ponadto wiemy, że U jest unitarna, czyli $U U^\dagger = U^\dagger U = I$. \dagger oznacza albo transpozycję, albo sprzężenie hermitowskie, zależnie, czy mamy do czynienia z przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych, czy zespolonych.

Rozwińmy w szereg Taylora eksponens i wykorzystajmy to, że $A = U^\dagger D U$

$$\exp((t - t_0)A) = \exp((t - t_0)U^\dagger D U) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^j}{j!} (U^\dagger D U)^j. \quad (\text{B.10})$$

Policzmy

$$(U^\dagger D U)^j = \underbrace{(U^\dagger D U)(U^\dagger D U) \dots (U^\dagger D U)}_{j \text{ razy}} = U^\dagger D^j U,$$

gdzie skorzystaliśmy z łączności mnożenia macierzy i unitarności U . Podstawiając ten wynik do (B.10) dostajemy

$$\exp((t - t_0)A) = \exp((t - t_0)U^\dagger D U) = U^\dagger \exp((t - t_0)D) U. \quad (\text{B.11})$$

Z algebry wiadomo, że D jest taką macierzą diagonalną, która na diagonalu ma wartości własne macierzy A : λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, czyli

$$D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

zatem policzenie $\exp((t - t_0)D)$ jest bardzo proste:

$$\exp((t - t_0)D) = \text{diag}[e^{(t-t_0)\lambda_1}, e^{(t-t_0)\lambda_2}, \dots, e^{(t-t_0)\lambda_n}].$$

Znalezienie macierzy U także nie nastęrcza większych trudności, jest ona macierzą złożoną z ustawionych obok siebie wektorów własnych macierzy A .

C Metoda Rungego-Kutty

Niewątpliwie czytelnik domyślił się, że zadania i przykłady prezentowane w tym skrypcie dobrane są tendencyjnie, tak, by można było znaleźć rozwiązanie tego czy innego równania analitycznie, inaczej mówiąc, tak, aby wyrażało się ono przez funkcje elementarne. Kolejnym stopniem wtajemniczenia byłoby omówienie równań różniczkowych, których rozwiązaniami są pewne funkcje specjalne, omawiane tradycyjnie w czasie kursu fizyki lub metod matematycznych fizyki.

Jednak nawet wtedy nie potrafimy sobie dać rady ze wszelkimi możliwymi do pomyślenia równaniami. Dotyczy to szczególnie równań nieliniowych, które są niezwykle ważne, bo zazwyczaj właśnie one opisują klasyczne układy dynamiczne. Badania nad nimi doprowadziło do rozwoju teorii chaosu deterministycznego.

„Ugryzienie” równań, których nie potrafimy rozwiązać analitycznie jest możliwe w sposób przybliżony, przez zastosowanie metod numerycznych. Obecnie możemy się oczywiście posłużyć komputerem, co czyni takie podejście bardzo wygodnym.

Istnieje wiele metod numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych, bywa, że pewne metody można stosować tylko do konkretnych typów równań różniczkowych, gdyż dla innych stają się numerycznie niestabilne, tzn. otrzymane wyniki są obciążone dużym błędem. Różne metody numeryczne służące rozwiązywaniu równań różniczkowych opisane są w książce Pressa i innych pt. „Numerical Recipes: the art of scientific computing”

Czytelnik niewątpliwie spostrzegł, że równania różniczkowe można rozwiązywać numerycznie metodą kolejnych przybliżeń opisaną w pierwszym rozdziale, tutaj opiszemy inną, całkiem uniwersalną metodę, znaną jako *metoda Rungego-Kutty*.

Zacznijmy od czegoś bardzo prostego i naturalnego, od *metody Eulera*. Naszym celem jest rozwiązanie, czy jak to się czasem mówi, scałkowanie równania

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$. W metodzie Eulera zastępujemy różniczki dy i dt skończonymi przyrostami Δy , Δt :

$$\Delta y = \Delta t f(t, y),$$

które można zapisać w postaci równania różnicowego:

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n),$$

wybierając konkretną wartość $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ iterujemy powyższe równanie otrzymując kolejne wartości y_n w kolejnych chwilach czasu. Oczywiście im mniejszy jest krok czasowy Δt , tym dokładniej przybliżamy prawdziwą trajektorię $y(t)$, ale za to musimy wykonać więcej operacji arytmetycznych, żeby poznać $y(t)$ na rozsądnie długim odcinku czasu t .

Metoda Eulera bez problemu jest uogólniana na równania wyższego rzędu. Jeżeli, na przykład, chcemy rozwiązać równanie

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \tag{C.1}$$

to wprowadzamy nową funkcję $x = dy/dt$ otrzymując układ równań pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= x, \\ \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \end{aligned}$$

który można zastąpić układem równań różnicowych

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + (t_{n+1} - t_n)x_n, \end{aligned}$$

tak jak powyżej poprzez iterację warunku początkowego t_0, x_0, y_0 dostajemy przybliżoną trajektorię $y(x, t)$.

Opisana metoda Eulera jest rzeczywiście bardzo prosta i łatwa w implementacji na komputerze, niestety w praktyce okazuje się, że wraz ze wzrostem ilości iteracji dość znacznie wzrastają błędy numeryczne, co z kolei powoduje konieczność użycia bardzo małej wartości kroku czasowego Δt wydłużając czas potrzebny do obliczeń.

Źródłem błędów metody Eulera jest to, że zmiany wartości y zależą jedynie od wartość pochodnej obliczonej na początku kroku Δt , lepsze przybliżenie dostajemy licząc tę pochodną częściej wewnątrz przedziału Δt . Na przykład dla równania pierwszego rzędu odcinek czasowy można podzielić na pół i licząc następujące wielkości

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n), \\k_2 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),\end{aligned}$$

dostajemy wzór na krok iteracji

$$y_{n+1} = y_n + k_2.$$

Jest to algorytm Rungego-Kutty drugiego rzędu; najczęściej wykorzystuje się algorytm Rungego-Kutty czwartego rzędu — zapewnia on rozsądną dokładność bez dramatycznego wzrostu czasu obliczeń, kroki algorytmu wyglądają następująco:

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n), \\k_2 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3),\end{aligned}$$

a główny krok iteracji jest dany przez

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}.$$