

## Propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania

Poniższe zadania zostały zaczerpnięte ze zbioru M. M. Smirnowa "Zadania z równań różniczkowych cząstkowych". W nawiasie podano numer danego zadania w wymienionym zbiorze. W zadaniach, w których sprecyzowano jedynie ogólne warunki początkowe lub brzegowe, należy samodzielnie wybrać i podstawić rozsądne dane. Na przykład, jeśli podano, że temperatura początkowa pręta o długości  $l$  wynosiła  $f(x)$ , można przyjąć, że  $f(x) = \sin \pi(x/l)$ , a  $l = 10$ .

### Zad. 1

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

( $0 < x < l, t > 0$ ), spełniające warunki

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

oraz

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{przy } 0 < x \leq \frac{1}{2}l, \\ l - x & \text{przy } \frac{1}{2}l \leq x < l. \end{cases}$$

[117]

### Zad. 2

Cienki, jednorodny pręt o długości  $l$ , izolowany od przestrzeni zewnętrznej, ma temperaturę początkową

$$f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

Końce pręta utrzymywane są w temperaturze 0. Określić temperaturę pręta w chwili  $t > 0$ . [118]

### Zad. 3

Dana jest jednorodna kula o promieniu  $R$ , której środek leży w początku współrzędnych. Wiadomo, że początkowa temperatura dowolnego punktu kuli zależy tylko od odległości  $r$  tego punktu od środka kuli. Przez cały czas obserwacji zewnętrzna powierzchnia kuli podtrzymywana jest w temperaturze zerowej. Określić temperaturę dowolnego punktu wewnątrz kuli w chwili  $t > 0$ . [121]

### Zad. 4

Znaleźć rozkład temperatury w jednorodnej kuli o promieniu  $R$ , wewnątrz której poczynając od chwili  $t=0$  działa źródło ciepła o stałej gęstości  $Q$ , a powierzchnia kuli utrzymywana jest w temperaturze 0. Początkowa temperatura kuli wynosi 0. [122]

### Zad. 5

Dany jest cienki jednorodny pręt o długości  $l$ , którego boczna powierzchnia jest izolowana od ciepła. Znana jest początkowa temperatura pręta. Koniec pręta  $x = 0$  utrzymywany jest w temperaturze 0, a na końcu  $x = l$  zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem o temperaturze 0. Określić temperaturę pręta w chwili  $t > 0$ . [124]

### Zad. 6

Rozwiązać zadanie 5 zakładając, że wymiana ciepła z otoczeniem zachodzi na obu końcach pręta. [125]

### Zad. 7

Rozwiązać zadanie 3 zakładając, że powierzchnia kuli przez cały czas chłodzi się w ośrodku o temperaturze 0. [126]

**Zad. 8**

Rozwiązać zadanie 4 przy warunku, że na powierzchni kuli zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem według prawa Newtona. Zakładamy, że temperatura ośrodka wynosi 0. [127]

**Zad. 9**

Jednorodna kula o promieniu  $R$  znajduje się w stałej temperaturze  $u_0$  w sferycznej powłoce z tego samego materiału o grubości  $R$  i temperaturze 0. Znaleźć temperaturę w wewnętrznych punktach kuli w odległości  $r$  od środka w chwili  $t > 0$ . [128]

**Zad. 10**

Jednorodne ciało stałe ograniczone jest dwiema współśrodkowymi sferami o promieniach  $R$  i  $2R$ . Wewnętrzna powierzchnia ciała nie przepuszcza ciepła. Warstwę kulistą nagrzano do temperatury  $u_0$ , a następnie chłodzi się ją w ośrodku o temperaturze 0. Znaleźć temperaturę w punktach wewnętrznych warstwy kulistej w chwili  $t > 0$ . [129]

**Zad. 11**

Opisać proces ostygnięcia jednorodnego pręta o powierzchni bocznej izolowanej od ciepła, jeżeli początkowa temperatura pręta wynosi  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , przy założeniu, że jeden koniec izolowano od ciepła, a drugi utrzymywany jest w stałej temperaturze  $u_0$ . [130]

**Zad. 12**

Dany jest cienki jednorodny pręt o długości  $l$  i temperaturze początkowej 0. Na końcu  $x = l$  pręta utrzymywana jest temperatura 0, a na końcu  $x = 0$  temperatura rośnie liniowo wraz z upływem czasu, czyli  $u(0, t) = At$ , gdzie  $A$  jest stałą. Znaleźć rozkład temperatury wzdłuż pręta przy  $t > 0$ . [131]

**Zad. 13**

Rozwiązać zadanie 12 przyjmując, że temperatura końca  $x = 0$  zmienia się według prawa  $u(0, t) = A \sin \omega t$ . [132]

**Zad. 14**

Dany jest cienki jednorodny pręt o długości  $l$ , którego temperatura początkowa równa się  $A(x/l)$ . Na końcu  $x = 0$  podtrzymywana jest temperatura 0, a na końcu  $x = l$  temperatura zmienia się według prawa  $u(l, t) = Ae^{-t}$ . Znaleźć rozkład temperatury wzdłuż pręta w chwili  $t > 0$ . [133]

**Zad. 15**

Dany jest cienki jednorodny pręt o długości  $l$  i temperaturze początkowej równej  $f(x)$ . Koniec  $x = 0$  pręta podtrzymywany jest w stałej temperaturze  $u_0$ , a koniec  $x = l$  w stałej temperaturze  $u_1$ . Poprzez boczną powierzchnię pręta następuje wypromieniowywanie ciepła do otoczenia, którego temperaturę przyjmujemy równą zeru. Określić temperaturę pręta w dowolnej chwili  $t$ . [139]

**Zad. 16**

Dany jest cienka prostokątna płytką o bokach  $l$  i  $m$  (pokrywających się z osiami współrzędnych), dla której znany jest początkowy rozkład temperatury. Boki  $x = 0$ ,  $x = l$  podtrzymywane są przez cały czas obserwacji w temperaturze 0, a obie podstawy mają dany rozkład temperatury:

$$u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad u|_{y=m} = \varphi_1(x) \quad (0 \leq x \leq l).$$

Znaleźć temperaturę dowolnego punktu płytki w chwili  $t > 0$ . [148]

**Zad. 17**

Dany jest jednorodny walec o promieniu  $R$  i długości  $l$ , którego temperatura wynosi  $f(r, x)$ . W chwili początkowej  $t = 0$  umieszczamy walec w ośrodku o temperaturze 0. Na bocznej powierzchni walca i na jego podstawach zachodzi wymiana ciepła według prawa Newtona. Znaleźć rozkład temperatury we wnętrzu walca w dowolnej chwili. [149]