Dyfrakcja a interferencja

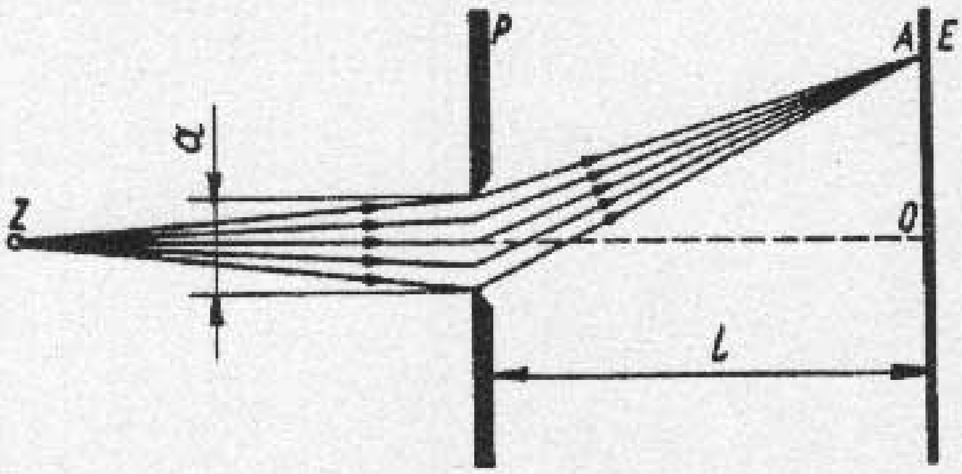
Nie ma istotnych różnic natury fizycznej. Rozróżnienie ma podłoże historyczne.

Interferencja - superpozycja fal wytwarzanych przez skończoną ilość dyskretnych źródeł spójnych,

Dyfrakcja - superpozycja fal wytwarzanych przez źródła spójne rozłożone w sposób ciągły.

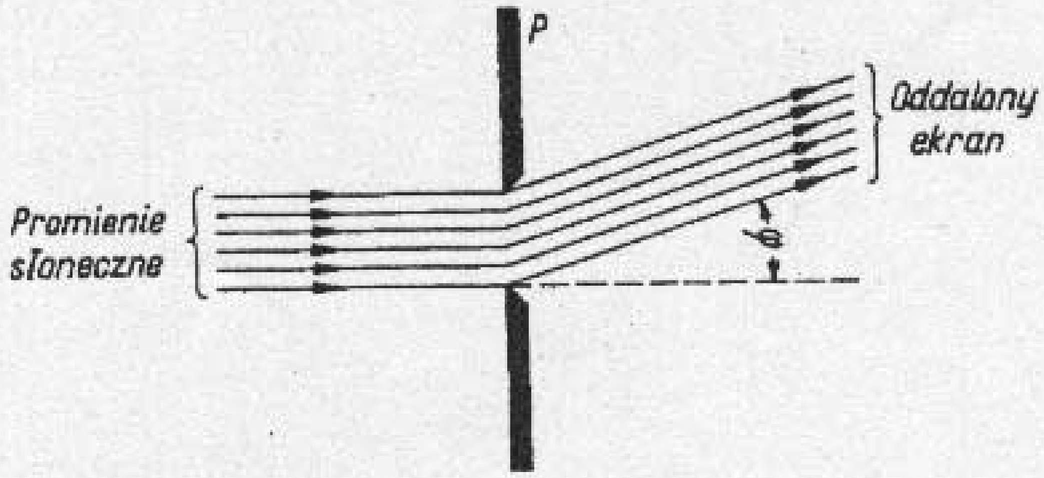
Dwa rodzaje dyfrakcji

a) dyfrakcja fal kulistych (dyfrakcja Fresnela)

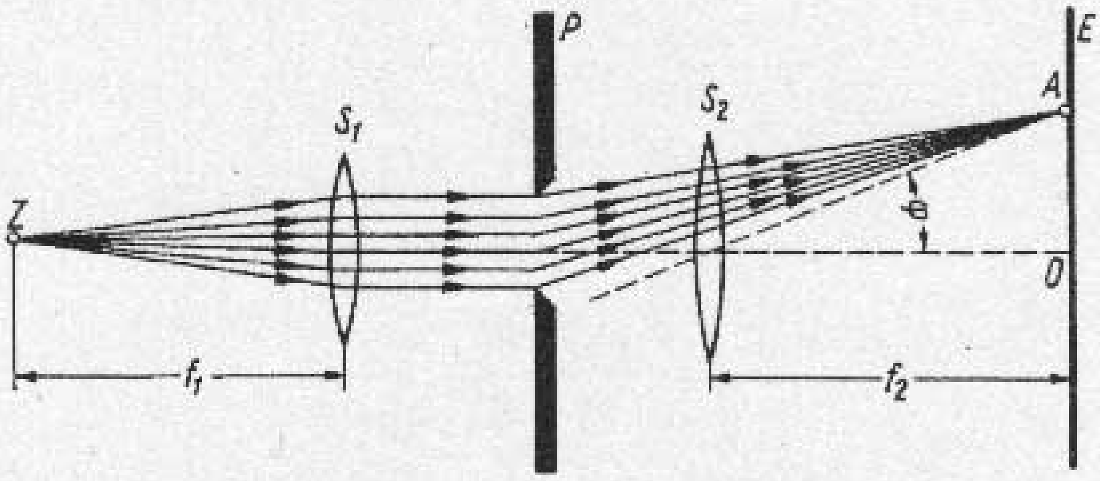


Przy dużej odległości źródła od przysłony i $a^2/(l\lambda) << 1$ dyfrakcja Fresnela jest równoważna dyfrakcji Fraunhofera, gdzie a - wielkość otworu, l - odległość ekranu od przysłony.

b) dyfrakcja fal płaskich (dyfrakcja Fraunhofera)

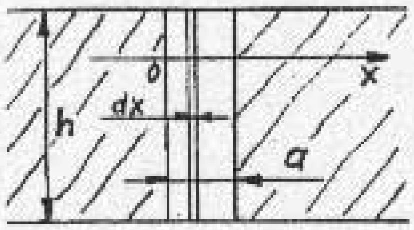


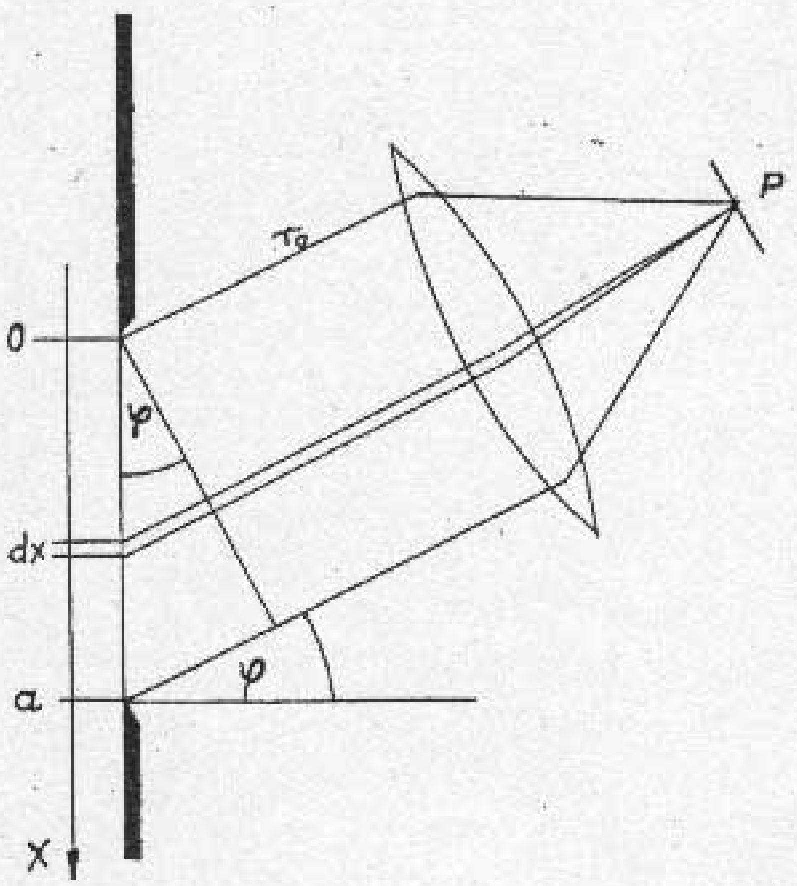
Realizacja dyfrakcji Fraunhofera w warunkach laboratoryjnych



Dyfrakcja Fraunhofera na pojedynczej szczelinie

W płaszczyźnie szczeliny $E = E_0 \cos(\omega t)$





Przyczynek do E w punkcie P od elementu dx

$$dE(r) = c\,h \cos(\omega t - kr)\,dx$$

c - stała

h - wysokość szczeliny

$r = r_0 + x\sin\varphi$

$$dE_\phi(x) = c\,h\cos(\omega t - kr_0 - kx\sin\varphi)\,dx$$

$$E_\phi = c\,h\int_0^a \cos(\omega t - kr_0 - kx\sin\varphi)\,dx$$

$$\omega t - kr_0 - kx\sin\varphi = \beta \quad \rightarrow \quad dx = -\frac{d\beta}{k\sin\varphi}$$

$$E_\phi = -\frac{c\,h}{k\sin(\varphi)}\int_{\omega t - kr_0}^{\omega t - kr_0 - ka\sin\varphi} \cos\beta\,d\beta =$$

$$= \frac{ch}{k\sin\varphi}\left[\sin(\omega t - kr_0) - \sin(\omega t - kr_0 - ka\sin\varphi)\right] =$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= \frac{2ch}{k\sin\varphi}\cos\left(\omega t - kr_0 - \frac{ka\sin\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{ka\sin\varphi}{2}\right)$$

$$E_\varphi = \frac{2ch}{k\sin\varphi}\cos\left(\omega t - kr_0 - \frac{ka\sin\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{ka\sin\varphi}{2}\right) =$$

$$= cha\frac{\sin\frac{ka\sin\varphi}{2}}{\frac{ka\sin\varphi}{2}}\cos\left(\omega t - kr_0 - \frac{ka\sin\varphi}{2}\right) =$$

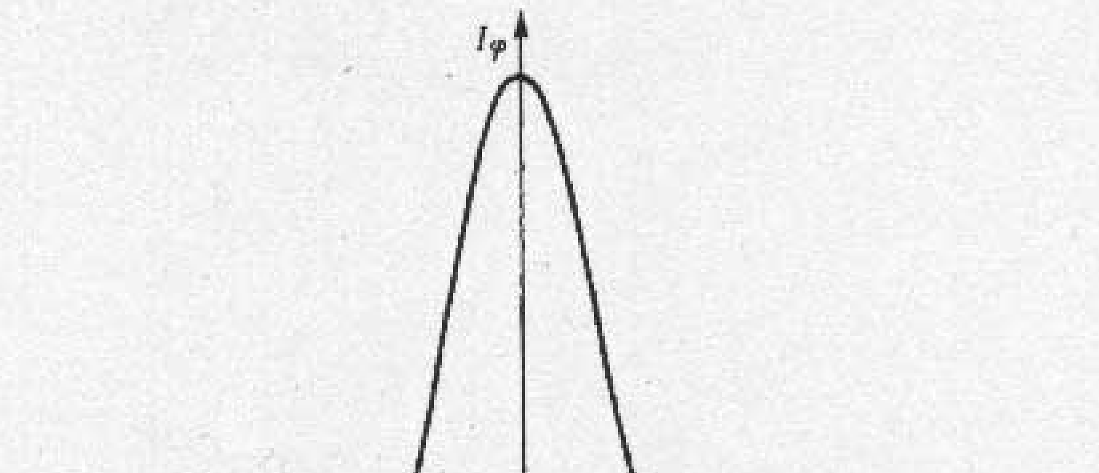
$$= cha\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos(\omega t - kr_0 - \alpha) \qquad \alpha = \frac{ka\sin\varphi}{2}$$

$$I_\varphi = \mathrm{const}\cdot\langle E_\varphi^2\rangle = \mathrm{const}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\langle\cos^2(\omega t - kr_0 - \alpha)\rangle = \mathrm{const}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

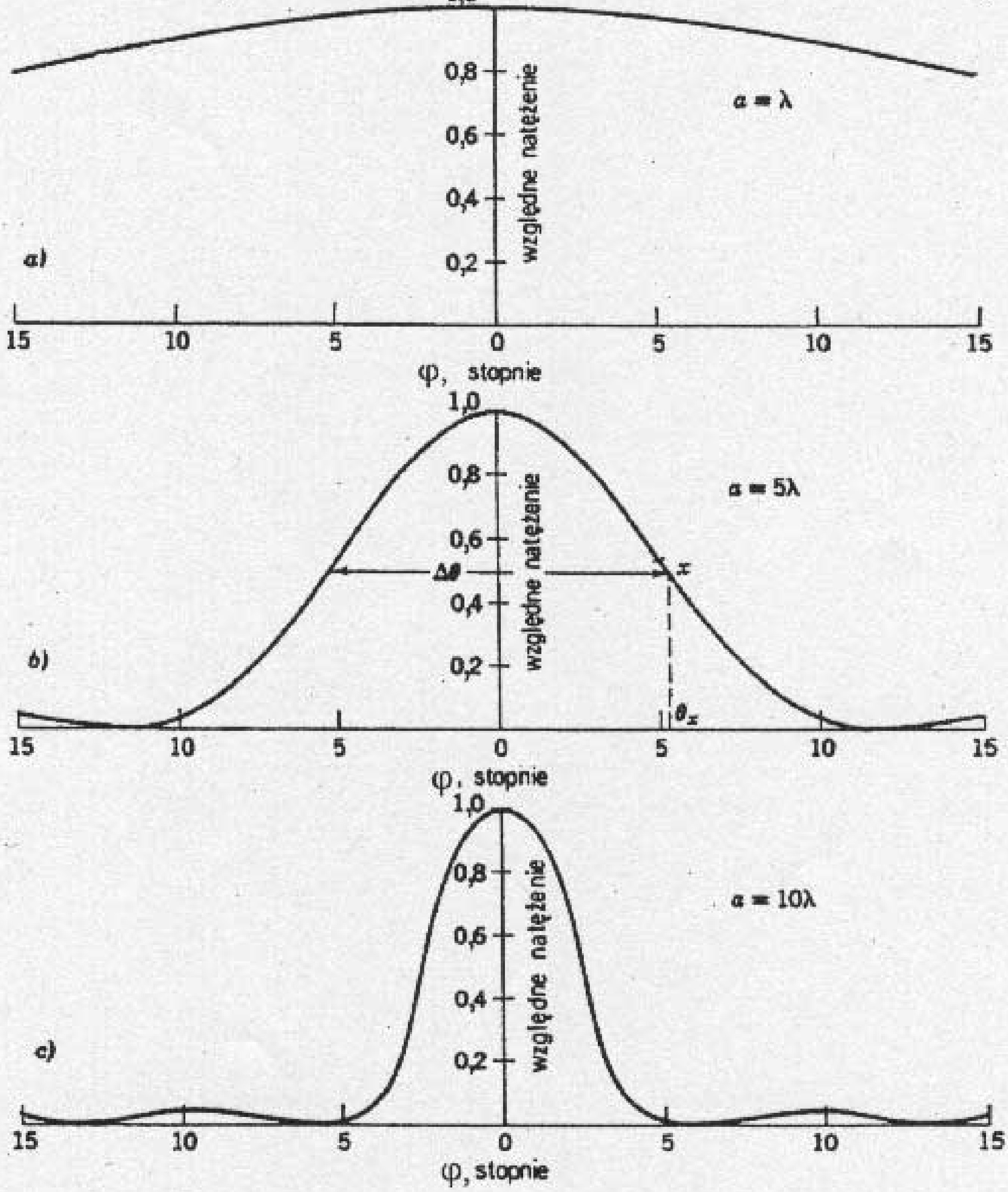
$$\langle\cos^2(\omega t - kr_0 - \alpha)\rangle = \frac{1}{2}$$

Natężenie I_φ przyjmuje wartość maksymalną, $I_\varphi = I_0$, dla $\alpha = 0$, czyli dla $\varphi = 0$. Stąd

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{ka\sin\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi$$



$$I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi$$



<u>Położenie minimów dyfrakcyjnych za pojedynczą szczeliną</u>

$$\sin\alpha = 0, \qquad \alpha = m\,\pi, \qquad m = \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi = m\,\pi \quad \rightarrow \quad a \sin\varphi = m\,\lambda, \qquad m = \pm1, \pm2, \ldots$$

Położenie maksimów dyfrakcyjnych za pojedynczą szczeliną

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi$$

Warunek na ekstremum $\quad \dfrac{dI_\varphi}{d\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dI_\varphi}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{d\varphi} = 0$

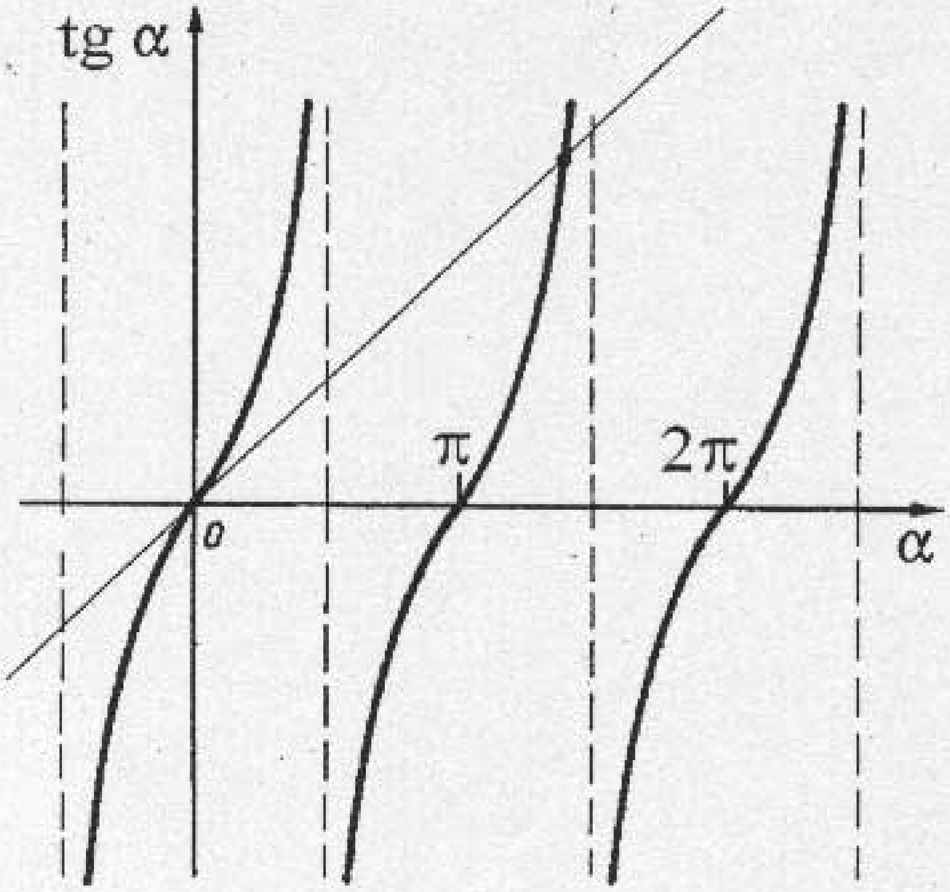
Dwie możliwości

a) $\dfrac{d\alpha}{d\varphi} = 0 \rightarrow \quad \cos\varphi = 0 \rightarrow \quad \varphi = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ - nieosiągalne

b) $\dfrac{dI_\varphi}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad 2I_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\dfrac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} = 0$

$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 0$ - odrzucamy, bo to jest warunek na minima, a szukamy położenia maksimów

$\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = \alpha$



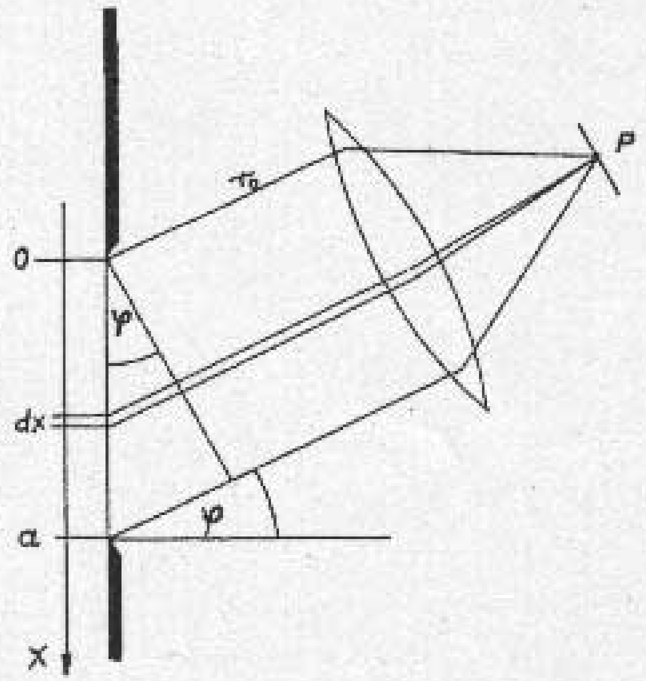
$$\alpha \approx (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

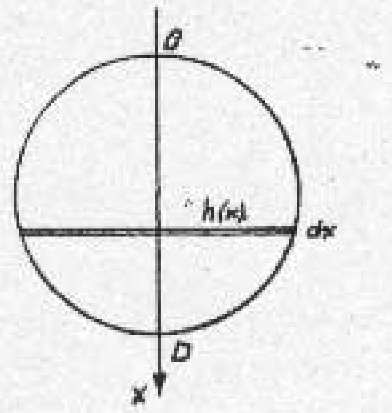
$$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$a\sin\varphi \approx (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

przybliżenie tym lepsze im m większe

Dyfrakcja Fraunhofera na otworze kołowym



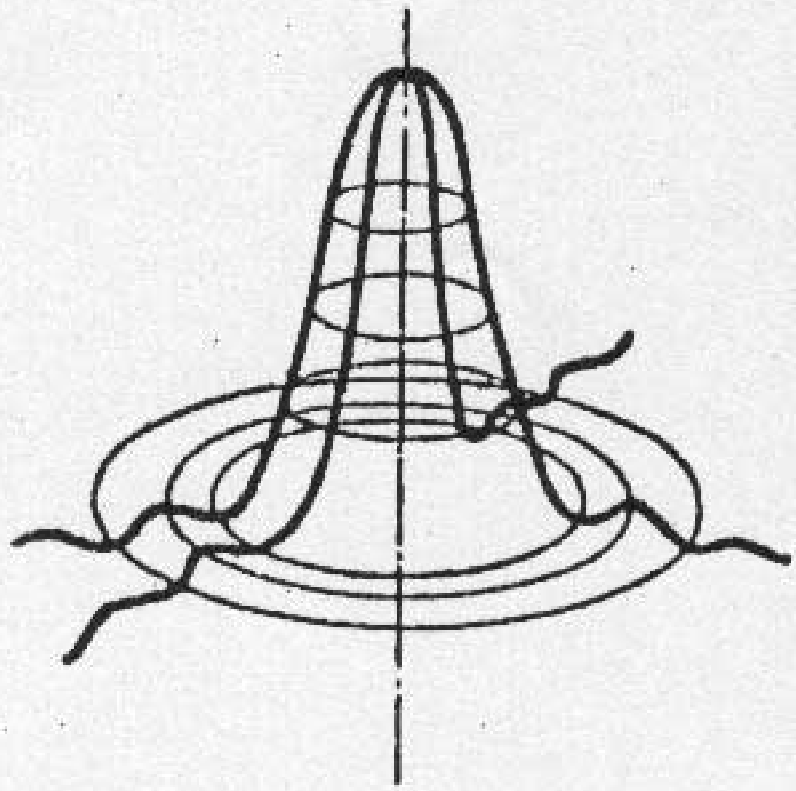


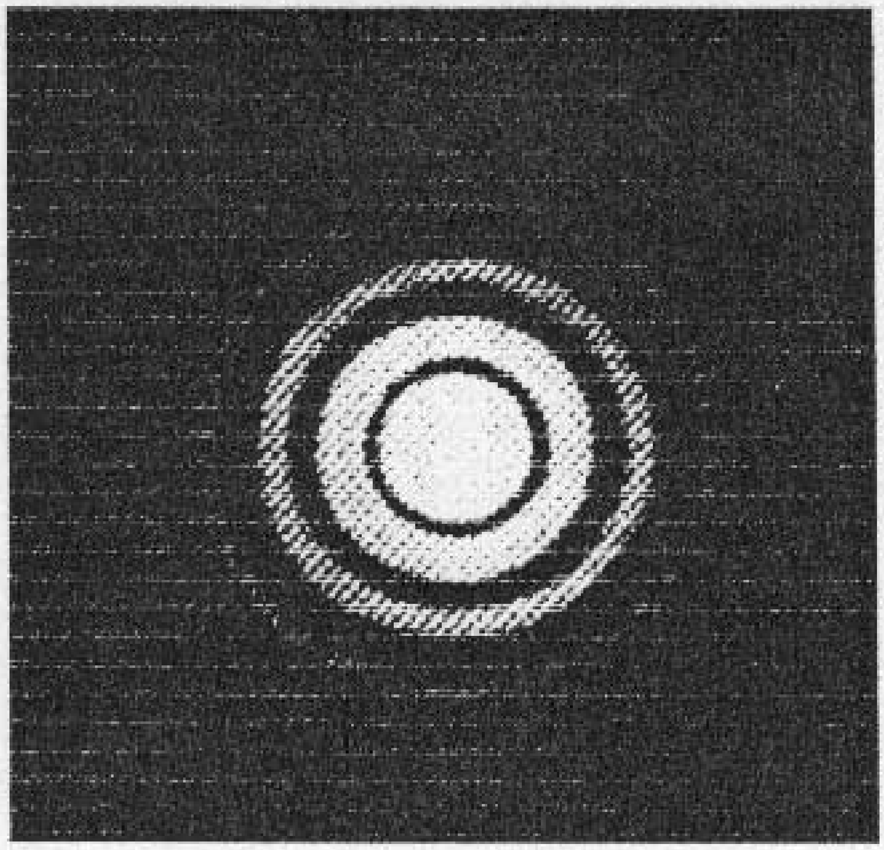
Dla prostokątnej szczeliny o wysokości h

$$dE_{\varphi}(x) = c\,h\cos(\omega t - kr_0 - k\,x\sin\varphi)\,dx$$

Dla otworu kołowego o średnicy D $\quad h = h(x) = 2\sqrt{x\,(D - x)}$

$$dE_{\varphi}(x) = c\,2\sqrt{x(D - x)}\cos(\omega t - kr_0 - k\,x\sin\varphi)\,dx$$





Centralna jasna plamka - *tarcza Airy'ego*

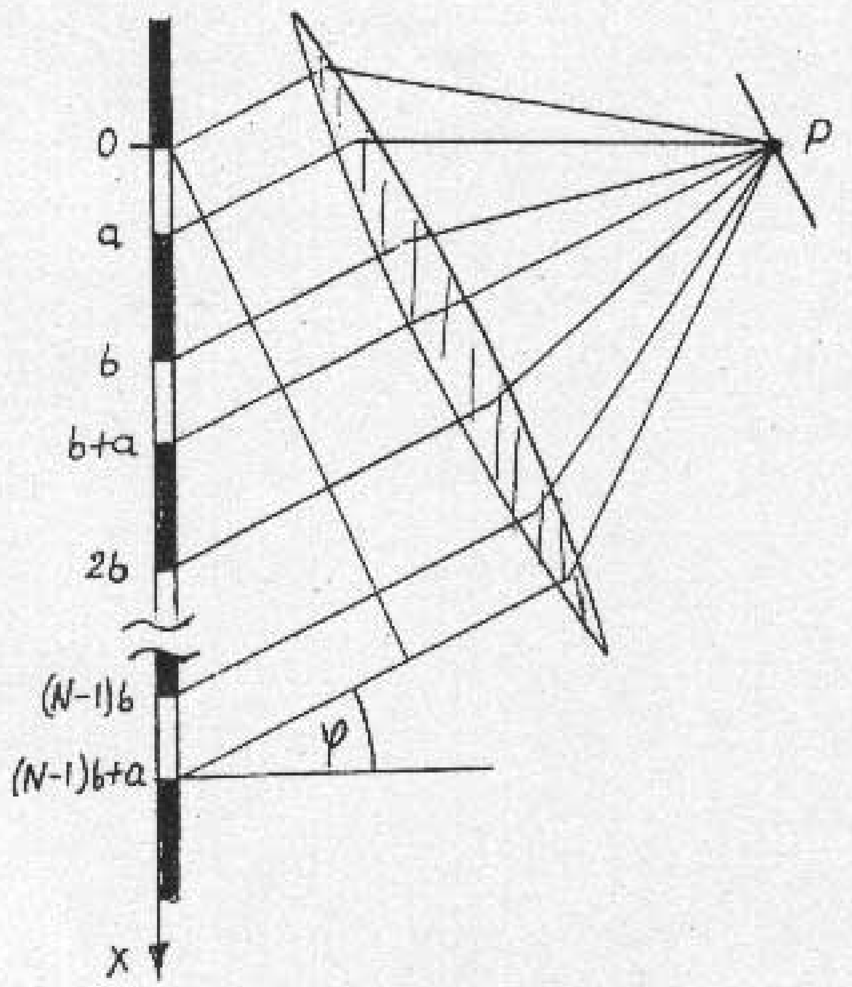
Warunek dla kąta φ , pod jakim powstaje pierwsze minimum

$$D\sin\varphi = 1{,}22\,\lambda$$

Dyfrakcja Fraunhofera na siatce dyfrakcyjnej

Siatka dyfrakcyjna - duża liczba (N) jednakowych szczelin rozmieszczona w stałych odległościach od siebie.

Stała siatki - odległość (b) między środkami sąsiednich szczelin.



Pole elektryczne w punkcie P jest superpozycją pól generowanych przez poszczególne szczeliny, ale opóźnionych w fazie o $m\delta_1$, $m = 0, 1, \ldots,\quad \delta_1 = k\,b\sin\varphi$

Dla pojedynczej szczeliny było

$$E_\varphi = c\,h\,a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos(\omega t - kr_0 - \alpha)$$

$$\alpha = \frac{k\,a\sin\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi$$

Dla N szczelin mamy więc

$$E_\varphi = c\,h\,a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big[\cos(\omega t - kr_0 - \alpha) + \cos(\omega t - kr_0 - \alpha - \delta_1) + \ldots$$
$$\ldots + \cos(\omega t - kr_0 - \alpha - (N-1)\,\delta_1)\Big] =$$

$$= c\,h\,a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\frac{N\delta_1}{2}}{\sin\frac{\delta_1}{2}}\cos\left(\omega t - kr_0 - \alpha - \frac{(N-1)\,\delta_1}{2}\right) =$$

$$= c\,h\,a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\cos(\omega t - kr_0 - \alpha - (N-1)\,\beta)$$

$$\beta = \frac{\delta_1}{2} = \frac{k\,b\sin\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}b\sin\varphi$$

$$E_\varphi = c\,h\,a\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\cos(\omega t - k r_0 - \alpha - (N-1)\beta)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\varphi \qquad \beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin\varphi$$

a - szerokość pojedynczej szczeliny

b - dległość między środkami sąsiednich szczelin (stała siatki)

Zależność natężenia światła od kąta ugięcia φ po przejściu przez siatkę dyfrakcyjną o N szczelinach

$$I_\varphi = \mathrm{const}\cdot\langle E_\varphi^2\rangle = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[\frac{\sin(N\beta)}{N\sin\beta}\right]^2$$

I_0 - natężenie światła obserwowane dla $\varphi = 0$

Przypadek $N = 1$ (pojedyncza szczelina)

$$\frac{\sin(N\beta)}{N\sin\beta} = 1 \quad \rightarrow \quad I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

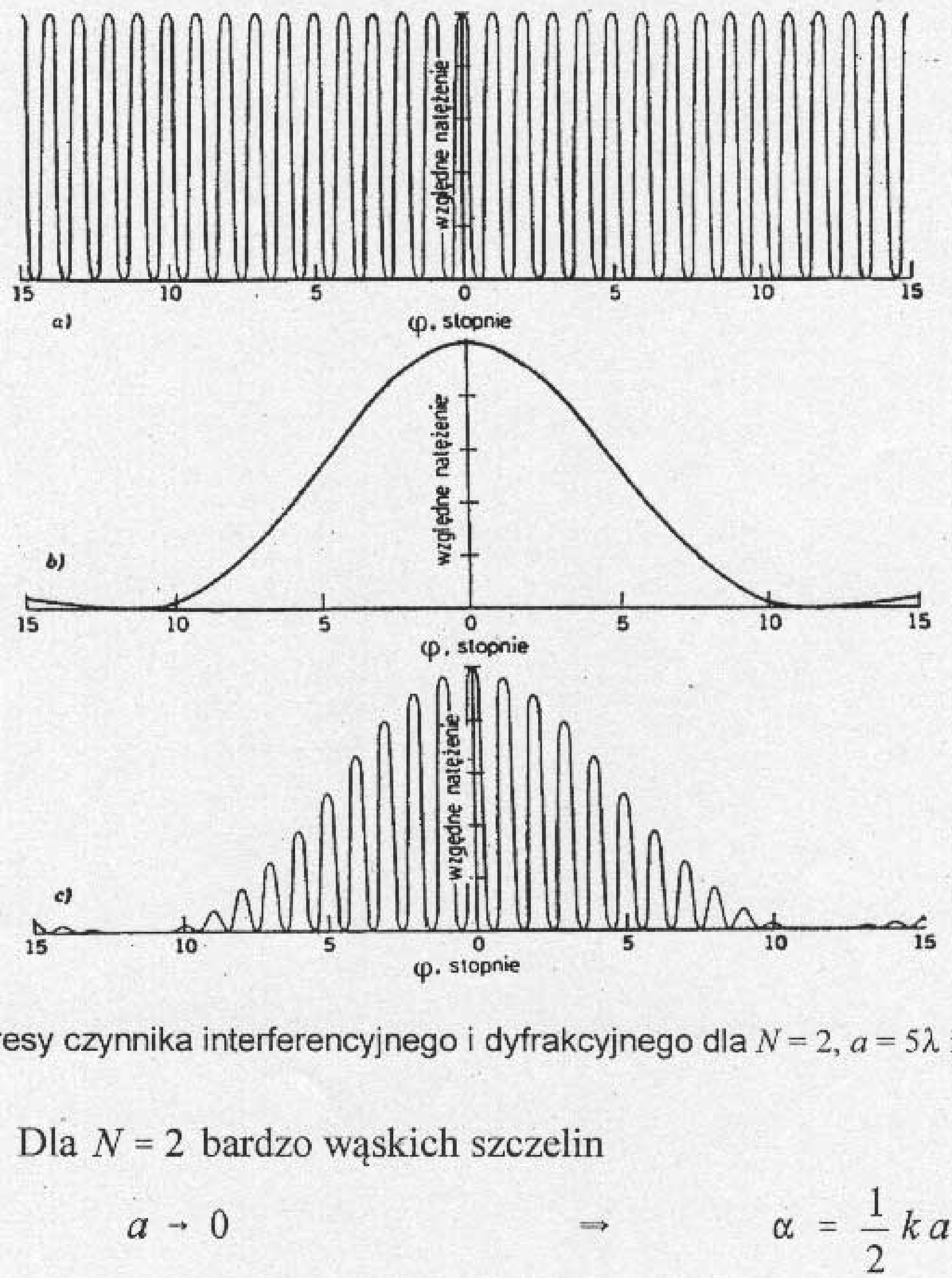
Przypadek $N = 2$ (opis doświadczenia Younga z ilościowym uwzględnieniem dyfrakcji)

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[\frac{\sin(2\beta)}{2\sin\beta}\right]^2 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\sin\beta}\right)^2 =$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{1}{2}k\,b\sin\varphi\right) =$$

$$= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\beta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$



Wykresy czynnika interferencyjnego i dyfrakcyjnego dla $N = 2$, $a = 5\lambda$ i $b = 50\lambda$

Dla $N = 2$ bardzo wąskich szczelin

$$a \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{2} k a \sin\varphi \to 0$$

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad I_\varphi = I_0\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$

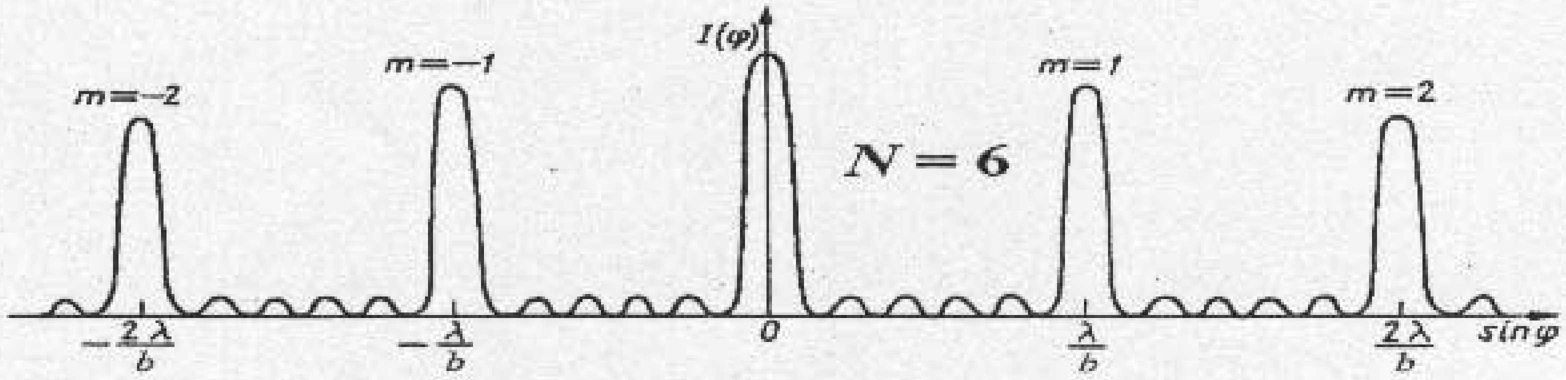
Podobnie jak dla interferencji światła z dwóch źródeł o jednakowych natężeniach $I_1 = I_2 = I$

$$I_w = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\langle\cos(\Delta\Phi)\rangle = 2I + 2I\langle\cos(\Delta\Phi)\rangle =$$

$$= 4I\,\frac{1+\cos(\Delta\Phi)}{2} = 4I\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$

Siatka o N szczelinach

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[\frac{\sin(N\beta)}{N\sin\beta}\right]^2 \qquad \alpha = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\varphi,\quad \beta = \frac{\pi}{\lambda}b\sin\varphi$$



Minima czynnika dyfrakcyjnego gdy $a\sin\varphi = k\lambda, \quad k = \pm1, \pm2, ...$

Maksima główne - maksima czynnika interferencyjnego, gdy $\sin\beta = 0$

$$\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = m\pi,\ m = 0, \pm1, \pm2, ...$$

$$\frac{\pi}{\lambda}b\sin\varphi = m\pi \qquad \boxed{b\sin\varphi = m\lambda} \quad m \text{ - rząd ugięcia siatki}$$

$$\lim_{\beta\to m\pi}\frac{\sin(N\beta)}{N\sin\beta} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin[N(m\pi+\varepsilon)]}{N\sin(m\pi+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(N\varepsilon)}{N\sin\varepsilon} = 1$$

W maksimach głównych czynnik interferencyjny przybiera wartość 1.

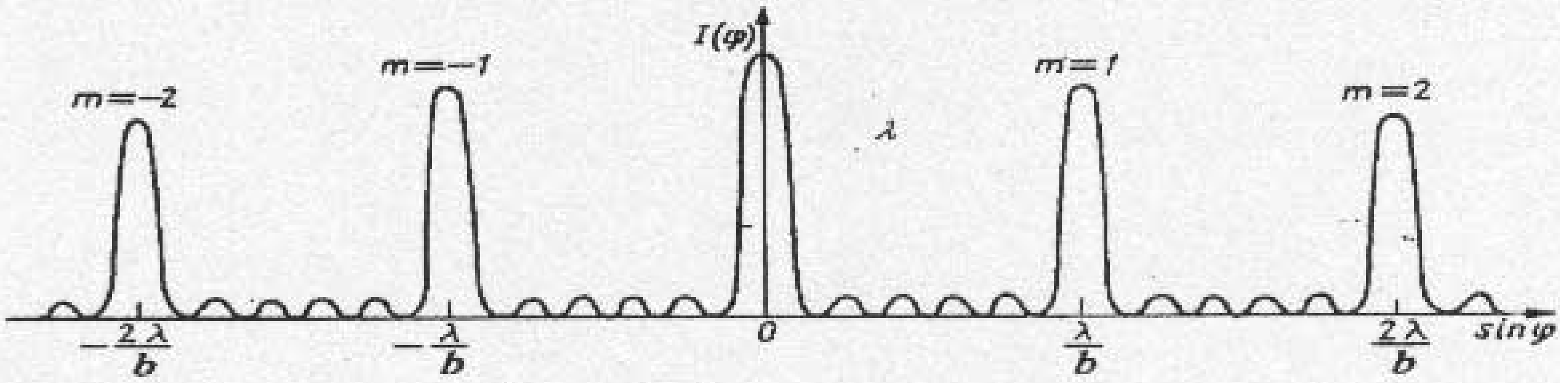
Maksima boczne - maksima inne niż maksima główne. Między każdą parą maksimów głównych są $N-2$ maksima boczne.

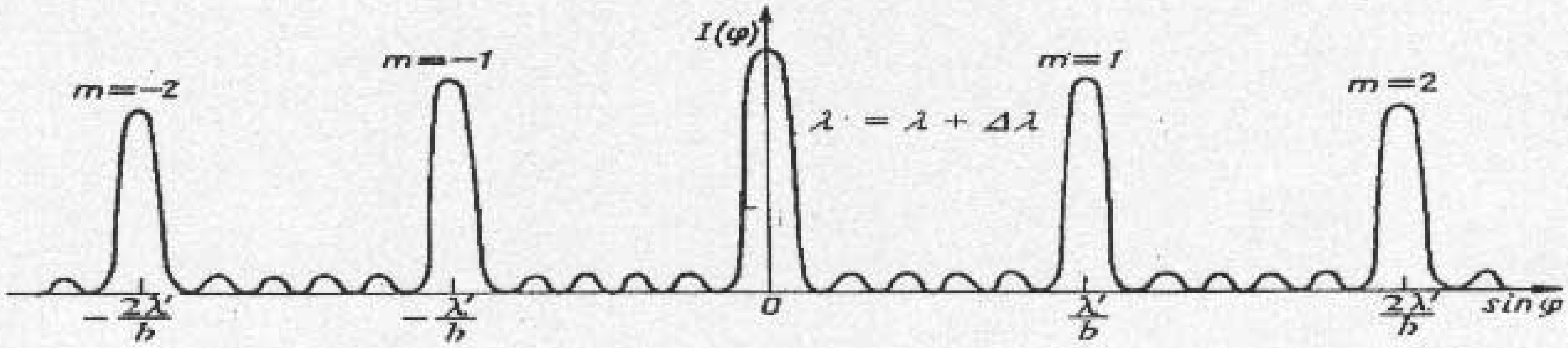
Minima dodatkowe- minima czynnika interferencyjnego, występują wtedy gdy $N\beta = (mN+k)\pi, \quad k = \pm1, \pm2, ..., \pm(N-1)$

$k>0$ dla $\varphi>0$ oraz $k<0$ dla $\varphi<0$

Między każdą parą maksimów głównych jest $N-1$ minimów.

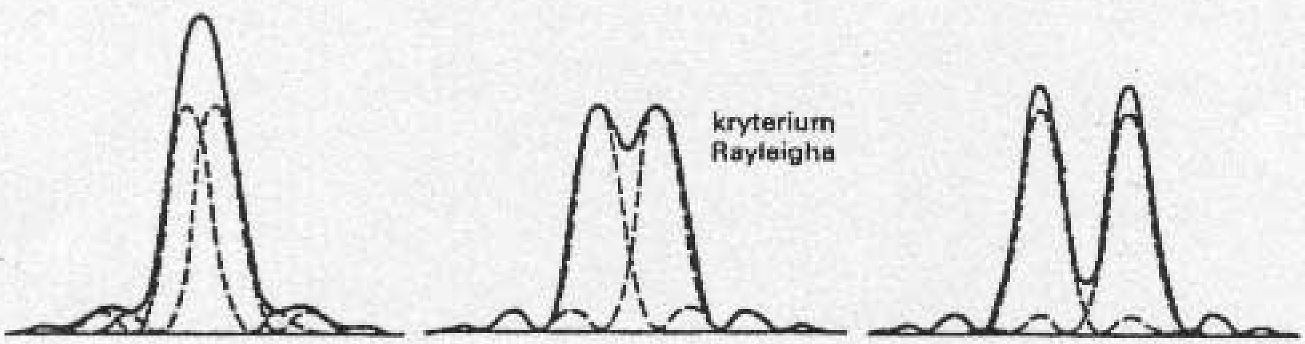
Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej





Kryterium Rayleigha

Dwie długości fali można rozdzielić, jeżeli maksimum dyfrakcyjne jednej z nich leży nie bliżej niż w pierwszym minimum dyfrakcyjnym drugiej.



R - zdolność rozdzielcza

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Załóżmy, że maksimum dyfrakcyjne dla $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ obserwowane jest pod kątem $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$. Mamy więc

$$\beta(\lambda + \Delta\lambda, \varphi + \Delta\varphi) = m\pi \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{\lambda + \Delta\lambda} b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = m\pi$$

Załóżmy też, że pod tym samym kątem $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ obserwowane jest pierwsze minimum dyfrakcyjne dla λ, czyli że zachodzi

$$N\beta(\lambda, \varphi + \Delta\varphi) = (Nm + 1)\pi \quad \rightarrow \quad \frac{N\pi}{\lambda} b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = (Nm + 1)\pi$$

$$\frac{\pi}{\lambda + \Delta\lambda} b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = m\pi \qquad b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

$$\frac{N\pi}{\lambda} b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = (Nm + 1)\pi \qquad b \sin(\varphi + \Delta\varphi) = m\left(\lambda + \frac{\lambda}{mN}\right)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$