Zestaw 7

1. Korzystając z klasycznego równania na moment pędu $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ pokaż, że operatory składowych momentu pędu wyrażają się następująco

$$L_x = -i\hbar\Big(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\Big); \qquad L_y = -i\hbar\Big(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\Big); \qquad L_z = -i\hbar\Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big);$$

2. Udowodnij następujące relacje

   (a) $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k,$ gdzie $i, j, k = \{x, y, z\}$

   (b) $[\mathbf{L}^2, L_i] = 0,$ dla dowolnego i, przy czym $\mathbf{L}^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

   (c) $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm,$ gdzie $L_\pm = L_x \pm iL_y$

   (d) $L_\pm L_\mp = \mathbf{L}^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$ gdzie $L_\pm = L_x \pm iL_y$

   (e) $[L_z, x] = i\hbar y, \qquad [L_z, y] = -i\hbar x, \qquad [L_z, z] = 0$

   (f) $[L_z, p_x] = i\hbar p_y, \qquad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x, \qquad [L_z, p_z] = 0$

3. (a) Udowodnij, że dla cząstki znajdującej się w polu siły o potencjale $V(\mathbf{r})$ prędkość zmian wartości oczekiwanej orbitalnego momentu pędu $\mathbf{L}$ jest równa wartości oczekiwanej momentu obrotowego $\mathbf{N}$

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{L}\rangle \quad = \quad \langle\mathbf{N}\rangle,$$

   gdzie

$$\mathbf{N} \quad = \quad \mathbf{r} \times \big(-\nabla V(\mathbf{r})\big)$$

   Wskazówka: Należy w tym przypadku wyprowadzić zależność na $d\langle\hat{Q}\rangle/dt$ dla dowolnego operatora $\hat{Q}$ i zależność tę zastosować dla $\hat{Q} = \hat{L}$.

   (b) Pokaż, że zachodzi $\frac{d}{dt}\langle L\rangle = 0$ w przypadku gdy potencjał V jest sferycznie symetryczny. Równanie to jest jedną z postaci prawa zachowania momentu pędu.

4. Udowodnij następujące fakty

   (a) operator momentu pędu $\mathbf{L}$ wyrażony we współrzędnych sferycznych ma postać

$$\mathbf{L} = -i\hbar\Big(\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$$

   gdzie $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ są wektorami jednostkowymi (wersorami),

   (b) składowe operatora momentu pędu, w układzie współrzędnych kartezjańskich, można zapisać

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\Big(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big), \\ L_y &= -i\hbar\Big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big), \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

   (c) zachodzi relacja

$$L_\pm \quad = \quad \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)$$

Wskazówki: Ad.(4a) – operator nabla w układzie sferycznym ma postać $\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, przy czym symbole $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ są symbolami wersorów określających *kierunki* w układzie współrzędnych sferycznych (nie są to symbole operatorów!).

Ad.(4b) – punktem wyjścia jest wynik zadania (4a). W równaniu na operator momentu pędu w układzie współrzędnych sferycznych, wersory $\hat{\theta}$ i $\hat{\varphi}$ należy wyrazić przez wersory układu kartezjańskiego $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Patrz np. **http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html**

5. Operatory $\mathbf{L}$ i L_z komutują ze sobą, z czego wynika bezpośrednio, że posiadają układ nietrywialnych wspólnych funkcji własnych (patrz np. Liboff, rozdz. 5.2).
Wykorzystując związki dowiedzione w zadaniach (4a)–(4c) oraz równania własne

$$\begin{aligned} L_z f(\theta,\varphi) &= m\hbar f(\theta,\varphi), \\ \mathbf{L}^2 f(\theta,\varphi) &= \hbar^2 l(l+1) f(\theta,\varphi) \end{aligned}$$

pokaż, że jednoczesnymi funkcjami własnymi powyższych operatorów są harmoniki sferyczne $Y_l^m(\theta,\varphi)$.
Wskazówka: Należy zapostulować następującą postać funkcji $f(\theta,\varphi) = g(\theta)h(\varphi)$, a następnie pokazać, że $h(\varphi) = e^{im\varphi}$, natomiast funkcja $g(\theta)$ spełnia równanie biegunowe.

6. Niech dane jest równanie własne operatora L_z

$$L_z f(\theta,\varphi) = \mu\, f(\theta,\varphi)$$

oraz operatory L_+ oraz L_-

$$L_\pm = L_x \pm iL_y.$$

   (a) Wykaż, że zachodzą relacje

   $$L_z\left(L_\pm f\right) = \left(\mu \pm \hbar\right)\left(L_\pm f\right).$$

   Innymi słowy, operator L_+ zwiększa wartości własne stanów operatora L_z o $\hbar$, natomiast operator L_- obniża wartości własne operatora L_z o $\hbar$. Z tego względu operatory $L_\pm$ nazywane są *drabinkowymi* – tworzą *drabinkę* stanów własnych operatora L_z.

   (b) Sprawdź w bezpośrednim rachunku, że prawdziwe są relacje

   $$\begin{aligned} L_+ Y_1^0(\theta,\varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} = \sqrt{2}Y_1^1(\theta,\varphi), \\ L_- Y_1^0(\theta,\varphi) &= +\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi} = \sqrt{2}Y_1^{-1}(\theta,\varphi). \end{aligned}$$

7. Zadania (9), (11), (12), (17) w [1], rozdz. 1.2

LITERATURA:

1. J. B. Brojan, J. Mostowski, K. Wódkiewicz, *Zbiór zadań z mechaniki kwantowej*, PWN, Warszawa 1987

2. R. L. Liboff, *Wstęp do mechaniki kwantowej*, PWN, Warszawa 1976, rozdz. 9

3. http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html

4. Dla bardziej zainteresowanych tematyką: G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Orlando, FL: Harcourt & Academic Press, 2001