8. MODEL ELEKTRONÓW SWOBODNYCH, QUASISWOBODNYCH I SILNIE ZWIĄZANYCH

8.1. Pokaż. że dla gazu elektronów swobodnych spełniona jest zależność:

$$g(E) = C_d E^{\frac{d-2}{2}}$$

gdzie d jest wymiarem gazu (1, 2 lub 3), g(E) - gęstością stanów. W każdym przypadku oblicz C_d.

8.2. Oszacuj temperaturę Fermiego:
a) ciekłego helu ^{3}He (gęstość 81 kgm^{-3});
b) neutronów w gwieździe neutronowej (gęstość 10^{17} kgm^{-3}).

8.3. Znajdź wyrażenie na koncentrację elektronów swobodnych w warunkach równowagi termicznej.

8.4. Praca wyjścia elektronu z metalu przeważnie wynosi około 3 eV. Oszacuj wartość "odległości penetracji" funkcji falowej elektronu na poziomie Fermiego na zewnątrz metalu.

8.5. Pokaż, że energia kinetyczna gazu elektronowego w temperaturze zera bezwzględnego wynosi:

$$E = \frac{3}{5} N E_F$$

Wyprowadź wyrażenia na (a) ciśnienie gazu elektronowego $p=-\partial E/\partial V$ i moduł ściśliwości $B=-V(\partial p/\partial V)$. Oszacuj wkład elektronów przewodnictwa do do B dla potasu i porównaj to z eksperymentalnie zmierzonym modułem ściśliwości dla potasu: $B=0.37\times10^{10}$ Nm^{-2}.

8.6. Idealny gaz elektronów swobodnych można traktować jako jednorodny rozkład ładunku ujemnego skompensowany elektrostatycznie przez jednorodnie rozłożone ładunki dodatnie. Jony traktujemy jako stacjonarny, natomiast elektrony - dynamiczny układ. Można zatem spodziewać się fluktuacji gęstości ładunku elektronów. Załóżmy, że mała cylindryczna objętość elektronów została przesunięta o odległość Δ. Ponieważ ładunki dodatnie nie mogą zmienić położenia, prowadzi to do powstania momentu dipolowego i pola elektrycznego. Opisz ruch gazu elektronowego. Znajdź częstotliwość drgań plazmy.

8.7. Elektron posiada trwały moment magnetyczny μ_B. Znajdź podatność magnetyczną gazu elektronów swobodnych.

8.8. Jakich własności ciał stałych model elektronów swobodnych nie jest w stanie wyjaśnić?

8.9. W ramach przybliżenia elektronów swobodnych oblicz stosunek k_F/k_m dla jednowartościowego metalu o strukturze fcc (stała sieci = a).
k_F - promień kuli Fermiego;
k_m - najkrótszy wektor sieci odwrotnej;

8.10. Całki typu $\int H(E)f(E)dE$, można w przybliżony sposób (rozwinięcie w szereg wokół punktu $E = \mu$; Ascroft str. 71) wyrazić następująco:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(E)\, f(E)\, dE = \int_{-\infty}^{\mu} H(E)\, dE + \sum_{n=1}^{\infty} (kT)^{2n} a_{2n} \frac{d^{2n-1}}{dE^{2n-1}} H(E) \Big|_{E=\mu}$$

gdzie:

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(-\frac{d}{dx}\frac{1}{\exp x+1}\right)dx$$

"Po kilku trywialnych przekształceniach" i kolejnym rozwinięciu w szereg otrzymujemy wynik:

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(E)\,f(E)\,dE=\int_{-\infty}^{\mu}H(E)\,dE+\frac{\pi^2}{6}(kT)^2H'(\mu)+\frac{7\pi^4}{360}(kT)^4H'''(\mu)+\ldots$$

Znajdź wyrażenie na zależność μ od temperatury (zaniedbaj wyrazy wyższego rzędu niż T^2).

8.11. Wiedząc, że średnia energia elektronu w temperaturze T wynosi:

$$\overline{E}(T)=\frac{3}{5}E_F(0)\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F(0)}\right)^2\right]$$

znajdź wartość stosunku $(C_v)_{FD}$ / $(C_v)_{KL}$ dla gazu elektronowego o energii Fermiego 7 eV. C_v - pojemność cieplna.

8.12. Znajdź temperaturę, w której elektronowe ciepło właściwe jest równe ciepłu molowemu sieci krystalicznej. Czy elektronowe ciepło właściwe jest duże czy małe?

8.13. Znajdź potencjał chemiczny gazu elektronowego w przypadku dwuwymiarowym, w dowolnej temperaturze.

8.14. Pokaż, że funkcje $\psi_1 = \sin(kx)$ i $\psi_2 = \cos(kx)$ są jedyną ortogonalną kombinacją liniową exp(ikx) i exp(-ikx), która spełnia warunek:

$$\int\psi_1^*V\psi_2dx=0$$

dla wszystkich wartości k, gdzie V jest periodycznym potencjałem sieci

$$V=-\sum_{n=1}^{\infty}V_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)$$

8.15. Oszacuj metodą rachunku zaburzeń poprawkę pierwszego rzędu do energii elektronu swobodnego spowodowaną potencjałem sieci krystalicznej. Dlaczego można spodziewać się jedynie jakościowej zgodności wyniku otrzymanego rachunkiem zaburzeń z rzeczywistością? Czy metoda quasiswobodnych elektronów jest właściwa dla elektronów o dowolnych energiach? Jeżeli nie, to dla jakich?

8.16. Cząstka o masie m porusza się w jednorodnym krysztale o długości L, w którym panuje słaby potencjał periodyczny, a energia potencjalna ma postać $V = 2V_0\cos(bx)$. Korzystając z rachunku zaburzeń dla stanów niezdegenerowanych znajdź : a) poprawkę do energii, b) masę efektywną elektronu w pobliżu dna pasma.