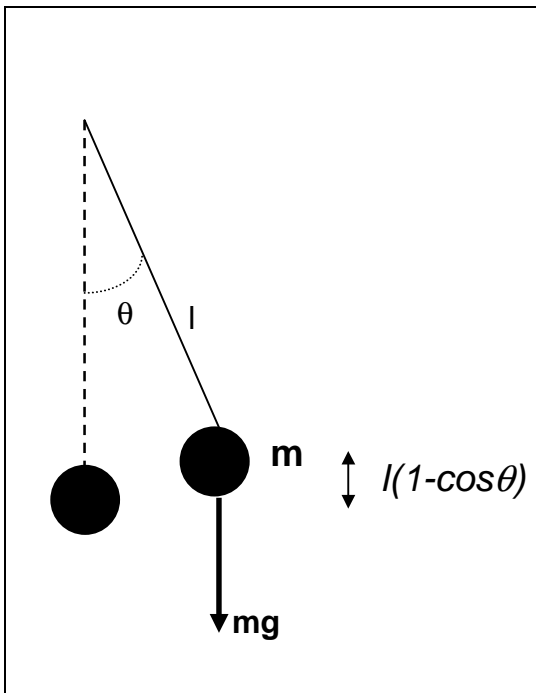


Przykłady drgań:

Wahadło matematyczne (małe wychylenia):



$$I = ml^2$$

$$M = -(mg \sin \theta)l$$

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

$$ml^2 \ddot{\theta} \cong -mgl \theta$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right) \theta \cong 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Inaczej:

$$v = l \cdot \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mg(l - l \cos \theta)$$

$$W = T + V$$

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

$$ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{lub}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Jeszcze inaczej:

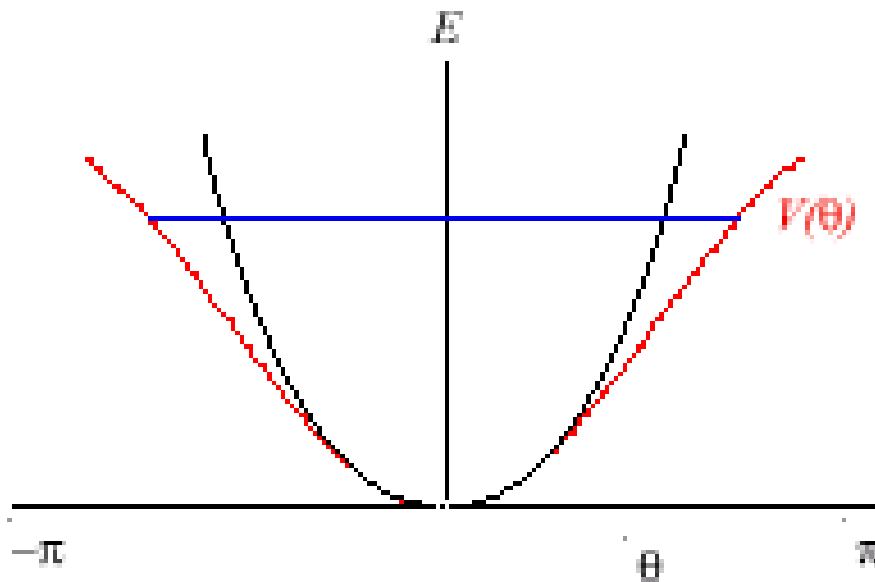
$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \quad V = mg \ell (1 - \cos \theta)$$

$$L = T - V \quad L = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg \ell (1 - \cos \theta)$$

Równanie Eulera-Lagrange'a: $\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} (2\ell^2 \dot{\theta}) \right] + mg \ell \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$



Ścisłe rozwiązanie wahadła

$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\Psi}^2 + mg \ell (1 - \cos \Psi)$$

$$\dot{\Psi}^2 = 2\omega_0^2 \cos \Psi + C \quad C = \left(\frac{2E}{m\ell^2} - \frac{2g}{\ell} \right)$$

Niech $\Psi = A$, gdy $\dot{\Psi} = 0$

$$\text{stad} \quad \cos A = -\frac{C}{2\omega_0^2} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sqrt{2\omega_0^2 \cos \Psi + C} \Rightarrow \frac{d\Psi}{\sqrt{2\omega_0^2 \cos \Psi + C}} = dt$$

$$T = 4 \int_0^A \frac{d\Psi}{\sqrt{2\omega_0^2 \cos \Psi + C}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^A \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi - \cos A}}$$

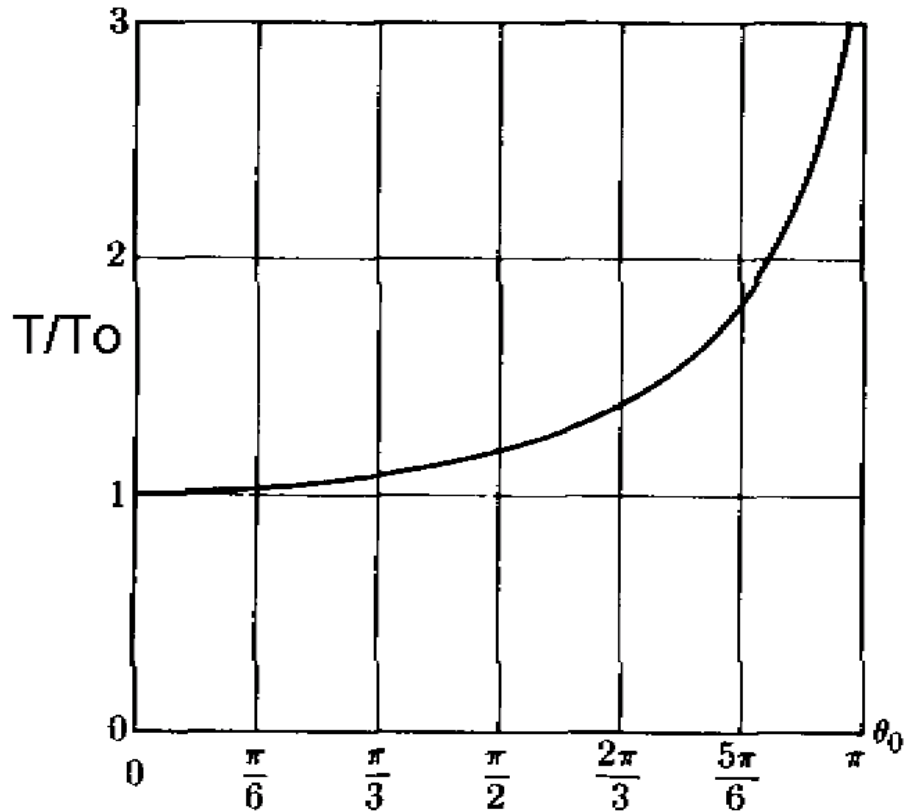
Wprowadzamy zmienną $\sin \varphi = \frac{\sin(\Psi/2)}{\sin(A/2)}$

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \begin{array}{l} \text{całka} \\ \text{eliptyczna} \end{array}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - K^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 K^{2n} \right\}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\ell/g} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \theta_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2} \theta_0 + \dots \right)$$

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{A}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{A}{2} + \dots \right]^{-1}$$



$$T = \frac{4\pi}{\omega_0} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{A}{2} + \dots \right\} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{16} A^2 \right)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\ell/g}$$

W praktyce:

$$T = 2\pi \sqrt{\ell/g} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right)$$

$$\left(\frac{\theta_0^2}{16} \rightarrow < 1\% \quad \text{dla} \quad \theta < 23^\circ \right)$$

Wahania, a rotacja.

Energia krytyczna:

$$W_{KRYT} = V(\theta = \pm\pi) = 2mgl$$

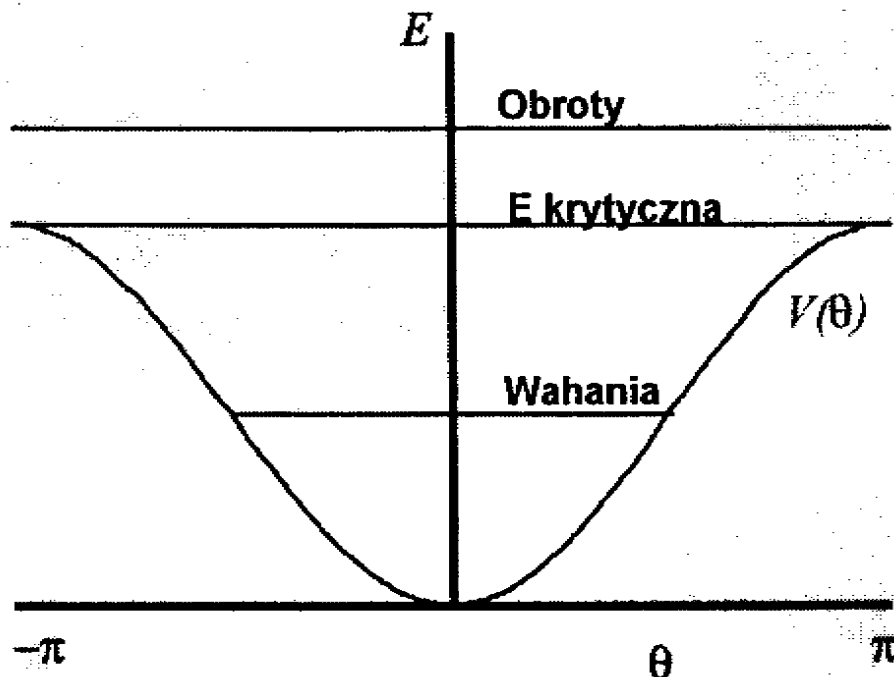
Dla $W = W_{KRYT}$

$$2mgl = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mg(l - l \cos \theta)$$

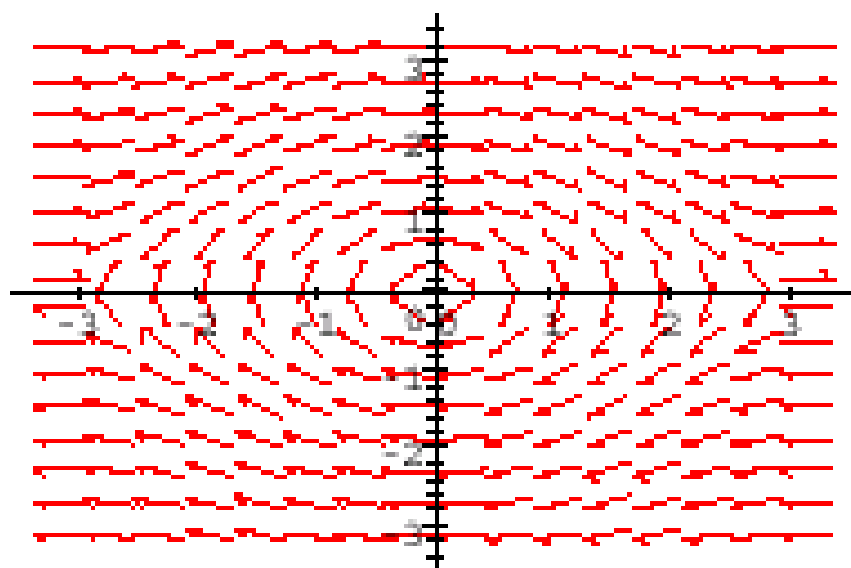
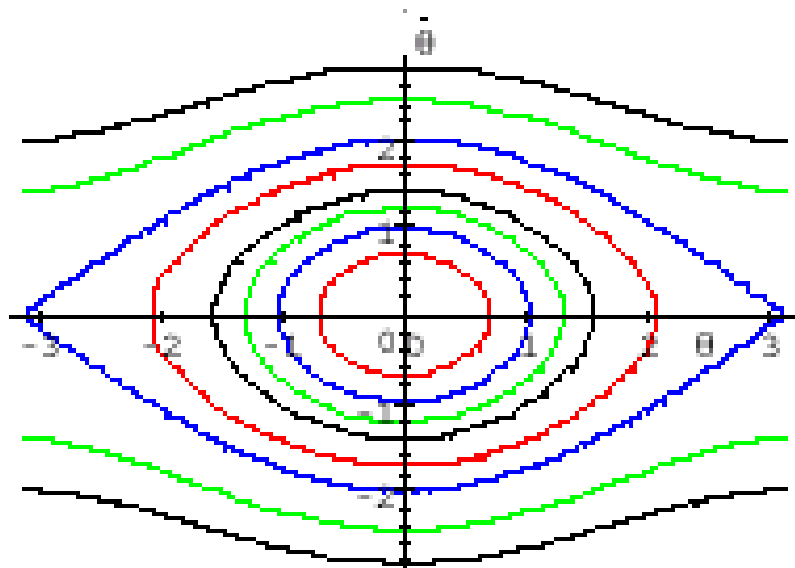
$$\dot{\theta} = 2\omega_0 \cos \frac{\theta}{2};$$

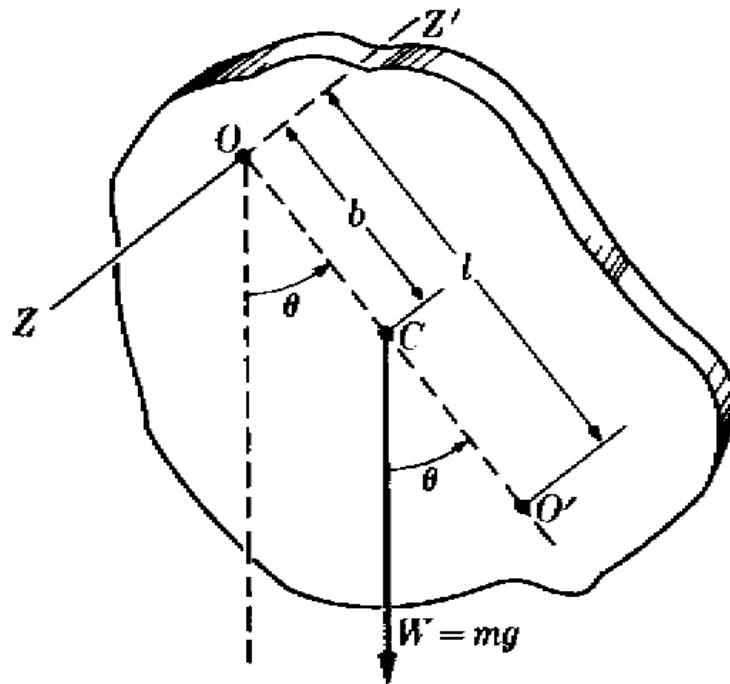
$$\text{Dla } \theta(0) = 0 \rightarrow \theta(t) = 2 \arcsin \left[\frac{1 - \exp(-2\omega_0 t)}{1 + \exp(-2\omega_0 t)} \right]$$

$$\text{Dla } \theta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \pi$$



Obraz ruchu wahadła matematycznego w przestrzeni fazowej.



Wahadło fizyczne:

$$\underline{I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M}$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgb \sin \theta$$

$$\sin \theta \approx \theta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I} \theta$$

$$\omega^2 = \frac{mgb}{I} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

$$I = mR^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{gb}{R^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{gb}}; R - \text{ramię bezwładności}$$

$\omega \neq f(m)$, zależy od kształtu

$$\omega^2 = \frac{mgb}{I}$$

$$I = I_{SM} + mb^2 \text{ - tw. Steinera}$$

$$\omega^2 = \frac{mb}{I_{SM} + mb^2} g$$

$$b \rightarrow \infty \quad \omega^2 \rightarrow \frac{g}{b} \rightarrow 0$$

$$b \rightarrow 0 \quad \omega^2 \rightarrow 0$$

Mała kulka na długiej nici (ℓ):

$$\ell \cong b, \quad I_{SM} \ll mb^2$$

$$\swarrow \searrow \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

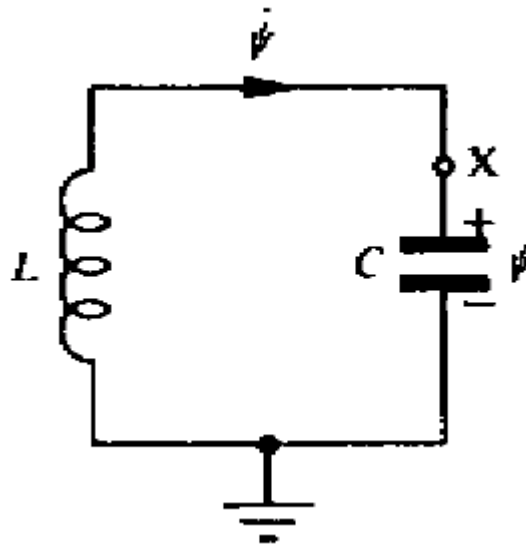
Długość zredukowana wahadła fizycznego

$$\omega_f^2 = \frac{mgb}{I} \quad \omega_m^2 = \frac{g}{\ell}$$

$$\ell_r = \frac{I}{mb}$$

$$\ell_r = \frac{R^2}{b}$$

Drgania elektryczne.



Ładunek $\Rightarrow \Psi$

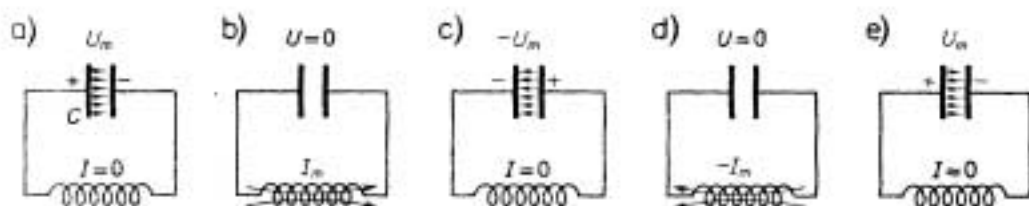
Potencjał kondensatora $\Rightarrow \frac{\Psi}{C}$

Natężenie prądu $\Rightarrow \dot{\Psi}$

$$L \left(\frac{d\dot{\Psi}}{dt} \right) + \frac{1}{C} \Psi = 0$$

$$\ddot{\Psi} + \frac{1}{LC} \Psi = 0$$

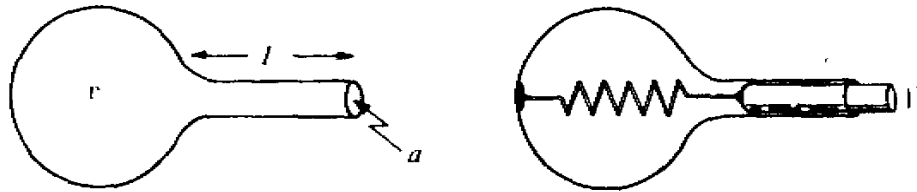
$$\omega_0 = \left(\frac{1}{LC} \right)^{1/2}$$



Analogie pomiędzy wielkościami charakteryzującymi
oscylator mechaniczny i drgający obwód elektryczny

Oscylator mechaniczny		Obwód drgający	
Przemieszczenie masy	Ψ	Ładunek na kondensatorze	Ψ
Prędkość masy	$\dot{\Psi}$	Natężenie prądu	$\dot{\Psi}$
Przyspieszenie masy	$\ddot{\Psi}$	Szybkość zmian prądu	$\ddot{\Psi}$
Masa	m	Indukcyjność cewki	L
Współczynnik sprężystości	k	Odwrotność pojemności kondensatora	C^{-1}
Opór	b	Oporność	R
Siła działająca na sprężynę	$k\Psi$	Napięcie na kondensatorze	$C^{-1}\Psi$
Siła oporu	$b\dot{\Psi}$	Napięcie na oporności	$R\dot{\Psi}$
Siła przyspieszająca masę	$m\ddot{\Psi}$	Napięcie na cewce indukcyjnej	$L\ddot{\Psi}$
Energia potencjalna	$k\Psi^2/2$	Energia elektryczna	$C^{-1}\Psi^2/2$
Energia kinetyczna	$m\dot{\Psi}^2/2$	Energia magnetyczna	$L\dot{\Psi}^2/2$

Drgania gazu w kolbie:



$$(\ell a \rho) \ddot{\Psi} = -a p' \quad p' - \text{różnica ciśnień}$$

$$\kappa = -\frac{1}{v} \frac{\partial V}{\partial p} \quad \text{współczynnik ścisłości}$$

$$\kappa \cong \frac{a \Psi}{v p'} \quad p', \Psi \text{ małe}$$

$$\omega_0 \cong \frac{a}{(\ell v \rho \kappa)^{1/2}}$$

Przybliżenie adiabatyczne:

$$pV^\gamma = \text{const}; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}; \quad \kappa = \frac{1}{\gamma p}$$

$$pV = RT \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{Mp}{RT} \quad \rho \kappa = \frac{M}{\gamma RT}$$

$$\omega_0 = \left[\left(\frac{a}{\ell v} \right) \left(\frac{\gamma RT}{M} \right) \right]^{1/2}$$

$$v = 10^{-3} \text{ m}^3, \quad a = 10^{-4} \text{ m}^2, \quad \ell = 5 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow$$

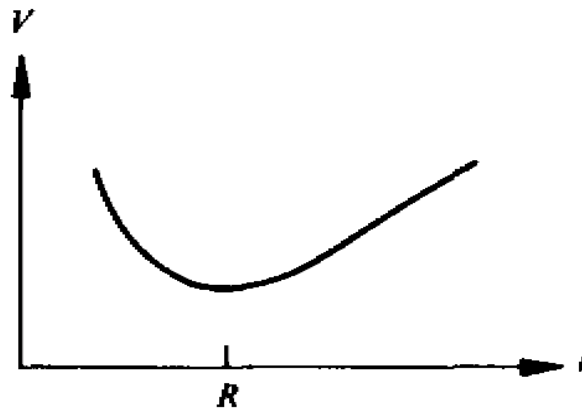
$$\Rightarrow \omega_0 \cong 500 \text{ s}^{-1} \quad \text{tzn.} \quad \nu_0 \cong 80 \text{ Hz}$$

Drgania cząsteczki:

Znając siłę zwrotną można określić częstość, znając częstość można określić siłę zwrotną.

Cząstka o masie m w położeniu r : $F(r) = -\frac{dV}{dr}$

Położenie równowagi $r \equiv R \Rightarrow \Psi = r - R$



W pobliżu $\Psi = 0$:

$$V = V_R + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_R \Psi^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3V}{dr^3} \right)_R \Psi^3 + \dots$$

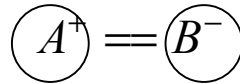
$$\left(\frac{dV}{d\Psi} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{d\Psi} = \frac{dV}{dr} \right) \Rightarrow$$

$$-F = \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_R \Psi + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3V}{dr^3} \right)_R \Psi^2 + \dots$$

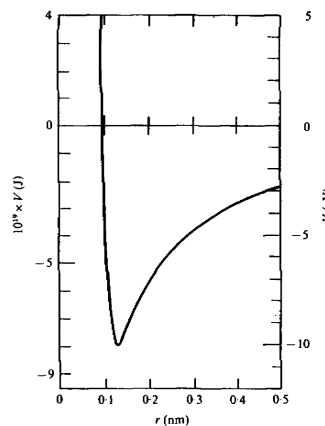
Dla małych wychyleń:

$$k \cong \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_R \quad \omega_0^2 \cong \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_R$$

Cząsteczka dwuatomowa A B:



$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^9} \quad (*)$$



$$\left(\frac{dV}{dr} \right)_{r=R} = 0 \Rightarrow B = \frac{e^2 R^8}{36\pi\epsilon_0}$$

Różniczkując dwukrotnie (*) i kładąc $R=r$:

$$k \approx 2e^2 / \pi \epsilon_0 R^3 \approx 1,84 \times 10^{-27} \text{ Nm}^2 / R^3$$

k zależy tylko od długości wiązania

Dla HCl: $R = 0,13 \text{ nm} \Rightarrow k = 840 \text{ Nm}^{-1}$

Sprężyna o tej samej sztywności rozciągałaby się o 12 mm po zawieszeniu na niej masy 1 kg.

$$m_{Cl} \cong 35m_H; \quad \omega_0 \cong (k/m_H)^{1/2} = 7,1 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

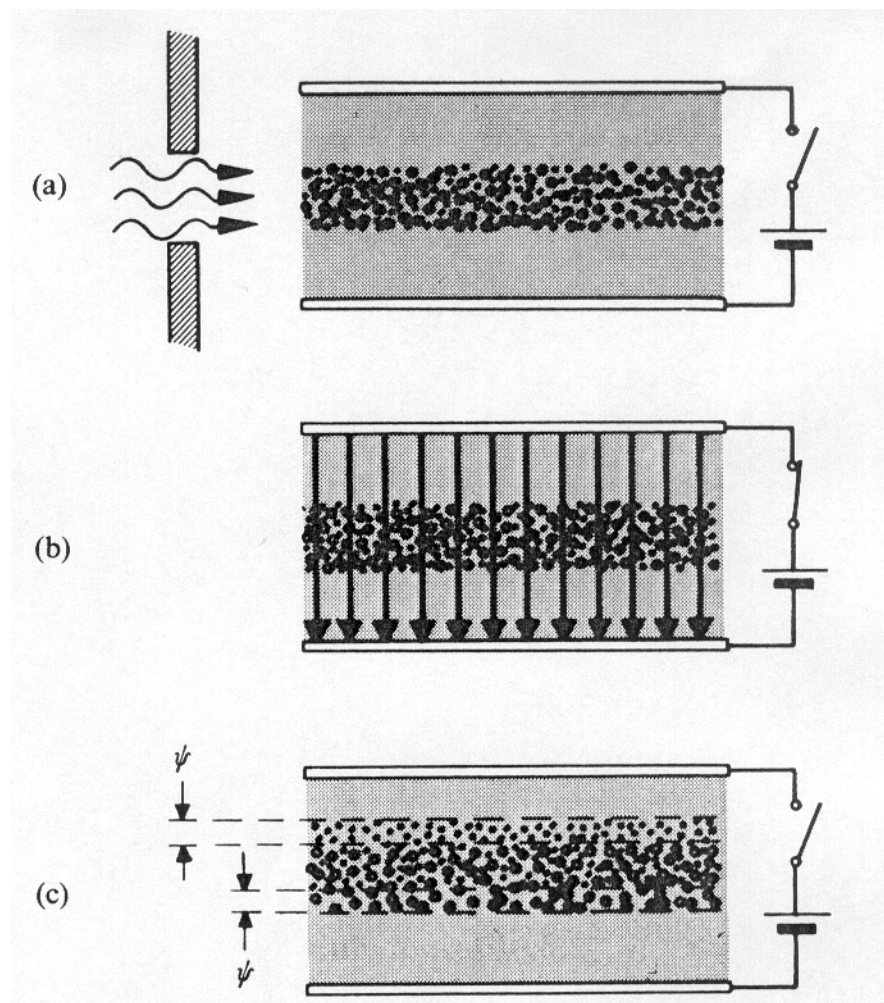
$$\Rightarrow \nu_0 \cong 1,1 \times 10^{14} \text{ Hz} - \text{podczerwień}$$

Drgania plazmy:

Plazma – gaz zjonizowanych cząstek.

Doświadczenie:

- jonizacja wiązką UV
- przestrzenne rozdzielenie ładunków dodatnich i ujemnych impulsem pola elektrycznego.



Powstają warstwy o powierzchniowej gęstości ładunku $-Ne\Psi$ i $Ne\Psi$

$$\Rightarrow \text{pole elektryczne } E = (Ne/\epsilon_0)\Psi.$$

Na elektron działa siła zwrotna $F = -(Ne^2/\epsilon_0)\Psi$.

Równanie ruchu: $\ddot{\Psi} + (Ne^2/m_e \epsilon_0)\Psi = 0$

$$\Rightarrow \omega = (e^2/m_e \epsilon_0)^{1/2} N^{1/2}$$

$$(e^2/m_e \epsilon_0 = 3.18 \times 10^3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2})$$

a) Jonosfera (>60 km).

Najwyższa warstwa: 10^{12} elektronów/m³

$$\omega_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \nu = 10 \text{ MHz}$$

Najniższa warstwa: 10^9 elektronów/m³

$$\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \nu = 300 \text{ KHz}$$

Drgania plazmy w metalu:

Traktujemy elektrony klasycznie.

Dla miedzi liczba elektronów w jednostce objętości:

$$N = 1000 N_A \rho / A$$

N_A - liczba Avogadro, $A = 63,5$ - ciężar atomowy,

$\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$ - gęstość $\Rightarrow N = 8.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$

$$\Rightarrow \omega_0 = 2 \times 10^{26} \text{ s}^{-1} \quad (\nu_0 = 3 \times 10^{15} \text{ Hz})$$

- częstość odpowiadająca światłu z obszaru UV.