

Wykład elektrodynamiki

L. Adamowicz, M. Wierzbicki

Dostęp przez Internet

Treść wykładu (<http://www.if.pw.edu.pl/~zak5www/ElectroDyn.pdf>)

Zadania (<http://www.if.pw.edu.pl/~wierzba/zajecia.html>)

Ostatnia modyfikacja: 2003-06-14

Spis treści

1	WSTĘP	1
1.1	Miejsce elektrodynamiki w fizyce	1
1.2	Elektrodynamika jako teoria pola	2
1.3	Równania Maxwella	2
1.4	Granice stosowalności klasycznej elektrodynamiki	3
1.5	Prawo Coulomba i masa fotonu	4
2	ELEKTROSTATYKA	7
2.1	Oddziaływania elektrostatyczne	7
2.2	Pole elektryczne	7
2.3	Ciągłe rozkłady ładunku	8
2.4	Linie pola, strumień i prawo Gaussa	8
2.5	Zastosowania prawa Gaussa	11
2.5.1	Symetria sferyczna	11
2.5.2	Symetria osiowa	11
2.5.3	Symetria płaszczyznowa.	12
2.5.4	Rotacja pola elektrostatycznego	13
2.6	Potencjał elektryczny	14
2.6.1	Równanie Poissona i Laplace'a	15
2.6.2	Potencjał ładunku zlokalizowanego	15
2.6.3	Warunki graniczne	16
2.7	Praca przy przesunięciu ładunku	16
2.7.1	Energia układu ładunków	17
2.7.2	Energia ciągłego rozkładu ładunków	18

2.7.3	Trzy typy relacji	19
2.8	Przewodniki	20
2.8.1	Wnęka wewnątrz przewodnika	21
2.8.2	Ładunki powierzchniowe	21
2.8.3	Układ przewodników	21
2.9	Specjalne metody elektrostatyki	22
2.9.1	Metody oparte na funkcjach Greena	23
2.9.2	Metoda separacji zmiennych	23
2.9.3	Rozwinięcie multipolowe	25
2.9.4	Metoda obrazów	26
2.10	Pola elektryczne w materii	27
2.10.1	Polaryzacja elektryczna	27
2.10.2	Fizyczna interpretacja ładunków związanych	30
2.10.3	Rzeczywiste pole w dielektryku	32
2.10.4	Prawo Gaussa w obecności dielektryków	33
2.10.5	Warunki brzegowe (graniczne)	33
2.10.6	Zagadnienia brzegowe w obecności dielektryków liniowych	35
2.10.7	Energia w układach z dielektrykami	35
3	MAGNETOSTATYKA	37
3.1	Siły magnetyczne	37
3.1.1	Pole magnetyczne	37
3.1.2	Siła Lorentza	37
3.1.3	Prądy	38
3.2	Prawo Biota - Savarta	40
3.2.1	Pole magnetyczne liniowego prądu stałego	40
3.3	Dywergencja i rotacja pola magnetycznego	42
3.3.1	Rotacja \mathbf{B} dla prądu prostoliniowego	42
3.3.2	Dywergencja i rotacja \mathbf{B} w przypadku ogólnym	43
3.3.3	Zastosowanie prawa Ampère'a	45
3.3.4	Porównanie magnetostatyki i elektrostatyki	48
3.3.5	Magnetyczny potencjał wektorowy	48
3.3.6	Podsumowanie i warunki brzegowe	50
3.3.7	Multipolowe rozwinięcie potencjału wektorowego	51
3.4	Pole magnetyczne w ośrodku	52
3.4.1	Namagnesowanie	52
3.4.2	Pole ciała namagnesowanego	53
3.4.3	Natężenie pola magnetycznego \mathbf{H}	55
3.4.4	Warunki brzegowe	56
3.4.5	Podatność i przenikalność magnetyczna	56
4	ELEKTRODYNAMIKA	57

4.1	Prawo Ohma	57
4.2	Siła elektromotoryczna	60
4.3	Poruszający się przewodnik w polu magnetycznym	60
4.4	Prawo Faradaya	61
4.5	Indukowane pole elektryczne	62
4.6	Indukcyjność	63
4.7	Energia pola magnetycznego	64
4.8	Elektrodynamika przed Maxwellem	66
4.9	Poprawka Maxwella	67
4.10	Równania Maxwella	68
4.11	Równania Maxwella dla ośrodka materialnego	69
4.12	Warunki graniczne	70
5	ZASADY ZACHOWANIA	73
5.1	Twierdzenie Poyntinga	73
5.2	Tensor napięć Maxwella	75
5.3	Pęd i moment pędu pola	77
6	FALE ELEKTROMAGNETYCZNE	79
6.1	Fale elektromagnetyczne w próżni	79
6.2	Równanie falowe	81
6.3	Transformacja Fouriera	82
6.4	Fale płaskie	83
6.5	Energia i pęd fal elektromagnetycznych	84
6.6	Fale elektromagnetyczne w ośrodku materialnym	86
6.7	Odbicie i przenikanie fali do innego ośrodka	87
6.8	Fale EM w przewodnikach	92
6.9	Odbicie od powierzchni przewodzącej	95
6.10	Falowody	96
6.10.1	Przypadek falowodu prostokątnego	99
7	POTENCJAŁY I POLA	103
7.1	Potencjał skalarny i wektorowy	103
7.2	Transformacja cechowania	105
7.3	Potencjały opóźnione	105
8	ELEKTRODYNAMIKA I TEORIA WZGLĘDNOŚCI	107
8.1	Zasada względności Galileusza	107
8.2	Transformacja Lorentza	108
8.3	Postulaty szczególnej teorii względności	109
8.4	Czasoprzestrzeń	109
8.5	Czterowektory	112
8.6	Stożek świetlny i linia świata	113

8.7	Energia i pęd	114
8.8	Czterowymiarowy potencjał pola	116
8.9	Relatywistyczne równanie ruchu cząstki naładowanej w polu EM	118
8.10	Tensor pola elektromagnetycznego	119
8.11	Transformacje pól \mathbf{E} i \mathbf{B} przy zmianie układu odniesienia	120
8.12	Niezmienniki pola elektromagnetycznego	122
8.13	Działanie dla pola elektromagnetycznego	123
8.14	Pole ładunku poruszającego się ruchem jednostajnym	124
8.15	Potencjały Liénarda-Wiecherta	128
8.16	Promieniowanie dipolowe	130
A	Relacje i twierdzenia	135
A.1	Relacje wektorowe	135
A.1.1	Iloczyny podwójne	135
A.1.2	Pochodne iloczynów	135
A.1.3	Relacje z drugimi pochodnymi	136
A.2	Podstawowe twierdzenia	136
A.2.1	Twierdzenie dla gradientów	136
A.2.2	Twierdzenie Gaussa (dla dywergencji)	136
A.2.3	Twierdzenie Stokesa (dla rotacji)	136
A.3	Współrzędne kartezjańskie	136
A.3.1	Gradient	136
A.3.2	Dywergencja	136
A.3.3	Rotacja	137
A.3.4	Laplasjan	137
A.4	Współrzędne kuliste	137
A.4.1	Wersory:	137
A.4.2	Gradient	137
A.4.3	Dywergencja	137
A.4.4	Rotacja	137
A.4.5	Laplasjan	138
A.5	Współrzędne walcowe	138
A.5.1	Gradient	138
A.5.2	Dywergencja	138
A.5.3	Rotacja	138
A.5.4	Laplasjan	138
B	Różne przekształcenia	139
B.1	Delta Diraca	139
B.2	Transformacja Fouriera	141
C	Uzupełnienia	145

C.1	Zależność przenikalności elektrycznej od częstości	145
D	Semestr letni 2003	149
D.1	Rozkład materiału na trzy części	149
	Literatura	151

1

WSTĘP

1.1 Miejsce elektrodynamiki w fizyce

Według obecnego stanu wiedzy istnieją cztery typy oddziaływań elementarnych:

1. grawitacyjne (niesłychanie słabe)
2. elektromagnetyczne
3. jądrowe silne (bardzo silne)
4. jądrowe słabe (słabsze, niż elektromagnetyczne)

Odpychanie elektryczne dwóch elektronów jest 42 rzędy wielkości silniejsze niż ich przyciąganie grawitacyjne.

Siły sprężystości, siły wiązania chemicznego i im podobne - mają pochodzenie elektromagnetyczne. Żyjemy, więc na codzień pod przemożnym wpływem sił elektromagnetycznych. Jednocześnie są to oddziaływania, które najwcześniej zaczęto badać i które udało się najlepiej zrozumieć. Teorie innych oddziaływań były i są inspirowane przez elektrodynamikę. W ostatnich dziesięcioleciach bardzo się rozwinęły – nie zostały jednak w jednoznaczny sposób potwierdzone doświadczalnie.

Nie będziemy się tu zastanawiać się nad doskonałością i urodą elektrodynamiki, która nabrała pełnego kształtu po opublikowaniu przez Maxwella w 1862 roku zespołu równań różniczkowych wyrażających dynamiczną teorię pola EM.

Mimo, że bursztyn i magnetyt były znane już starożytnym Grekom badania ilościowe zostały zapoczątkowane przez Cavendisha dopiero w latach 1771-3. Następnie były kontynuowane przez Coulumba, Ampère'a, Faradaya i wielu innych. Trwało to niecałe sto lat.

Historia badań prowadzonych na skalę światową w celu zrozumienia elektryczności, magnetyzmu i światła jest znacznie dłuższa niż wynika to z przytoczonych powyżej dat. Około 1900 roku trzy wielkie działy fizyki – elektryczność, magnetyzm i optyka zostały połączone w jedną całość. Można powiedzieć, że zjawiska EM obejmują całą naturę.

Z elektrodynamiki wyrosła teoria względności, najpierw szczególna – stanowiąca rozszerzenie mechaniki newtonowskiej na duże prędkości (porównywalne z prędkością światła), następnie ogólna – będąca teorią oddziaływań grawitacyjnych. Marzenia o unifikacji zrealizowane w elektrodynamice przeniosły się na całą fizykę. Kulminacją takiej “teorii wszystkiego” jest zaproponowana w latach osiemdziesiątych teoria superstrun. Mimo piętrzących się co raz większych trudności natury matematycznej oraz wzrostu dystansu między odkryczymi hipotezami a możliwością ich weryfikacji doświadczalnej widać, że program unifikacji zapoczątkowany w elektrodynamice jest realizowany jako ważny etap w rozwoju fizyki.

1.2 Elektrodynamika jako teoria pola

Twierdzimy, że przestrzeń wokół ładunków jest wypełniona polami elektrycznymi i magnetycznymi. Pola te pośredniczą w przekazywaniu oddziaływań między ładunkami. Przyspieszenie ładunku powoduje, że część pola odłącza się od niego i staje się niezależna, niosąc energię, pęd i moment pędu z prędkością światła w postaci promieniowania elektromagnetycznego. Doświadczalne potwierdzenie istnienia promieniowania pozwoliło uznać pola za niezależne obiekty dynamiczne. W ten sposób od badania ładunków przechodzi się do badania pól.

1.3 Równania Maxwella

(i)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$	prawo Gaussa,
(ii)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	beźródłowość,
(iii)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$	prawo Faradaya,
(iv)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 (\partial \mathbf{E}/\partial t)$	poprawione prawo Ampère’a.

Powyższe równania dopuszczają istnienie dwóch rodzajów ładunku elektrycznego. W sposób niejawni równania te zawierają równanie ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ładunku nie można ani wytwarzać ani zniszczyć. Do badania ruchu cząstek naładowanych niezbędne jest dodatkowe równanie, podające siłę działającą na ładunek w polu EM – tzw. siłę Lorentza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Występujące w równaniach Maxwella pole elektryczne \mathbf{E} i pole magnetyczne \mathbf{B} zdefiniowano w oparciu o siłę Lorentza.

Coulomb mierzył siły oddziaływania między ładunkami a Ampère – siłę między przewodnikami z prądem. Pola \mathbf{E} i \mathbf{B} stanowią wygodny sposób opisu tych sił. Dodatkowo posiadają inne ważne cechy, niezależne od źródeł. Zauważmy, że:

- różne rozkłady ładunku mogą dawać te same pola
- pola mogą istnieć tam, gdzie nie ma ładunków.

Pojawienie się pól elektromagnetycznych stanowi jedną z najbardziej owocnych koncepcji w fizyce klasycznej i kwantowej.

1.4 Granice stosowalności klasycznej elektrodynamiki

W większości zagadnień makroskopowych można całkowicie zaniedbać ziarnistość ładunku elektrycznego. Kondensator o pojemności $C = 1 \mu\text{F}$ naładowany do napięcia 150 V na każdej okładce ma ok. 10^{15} ładunków elementarnych. Prąd o natężeniu $i = 1 \mu\text{A}$ odpowiada przepływowi ok. 10^{13} ładunków elementarnych na sekundę.

Istnieją jednak sytuacje makroskopowe, w których można zaobserwować ziarnistość ładunku elektrycznego. Przykładem może być doświadczenie Millikana z kropelkami oleju o średnicy $1 \mu\text{m}$.

Pola \mathbf{E} i \mathbf{B} w elektrodynamice klasycznej stanowią graniczne przybliżenie opisu kwantowego dla dużych liczb kwantowych. W opisie zjawisk makroskopowych a nawet wielu zjawisk w skali atomowej nieciągła, falowa struktura pola elektromagnetycznego może być zaniedbana lub uśredniona.

W odległości 1 m od 100 W żarówki średnie pole elektryczne jest rzędu 0,5 V/cm, co odpowiada strumieniowi fotonów widzialnych rzędu $10^{15}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$.

W odległości 100 km od izotropowej anteny UKF (100 MHz) \mathbf{E} jest jedynie rzędu 5 $\mu\text{V}/\text{cm}$ co wciąż odpowiada strumieniowi $10^{12}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$. Zwykle przyrządy nie są czułe na pojedyncze fotony. Rejestrują one łączny efekt wywołany emisją lub absorpcją olbrzymiej liczby fotonów. W takich sytuacjach opis oparty na równaniach Maxwella jest całkowicie poprawny.

Można przyjąć następujące kryterium poprawności opisu przy użyciu klasycznego pola elektromagnetycznego. Opis klasyczny można stosować wtedy, gdy liczba fotonów biorących udział w zjawisku jest duża, a ich pęd jest niewielki w porównaniu z pędami charakterystycznymi badanego układu.

Każdy z fotonów anteny UKF (100MHz) wymienia z nią pęd rzędu $10^{-34} \text{N} \cdot \text{s}$. Gdy pęd fotonów $h\nu/c$ staje się porównywalny z mc , gdzie m jest masą spoczynkową elektronu, jak to ma miejsce w rozpraszaniu Comptona, konieczny jest opis kwantowy.

Zjawisko fotoelektryczne wymaga opisu kwantowego w odniesieniu do elektronów. Prąd fotoelektryczny można opisywać w przybliżeniu klasycznym dla pola elektromagnetycznego.

1.5 Prawo Coulomba i masa fotonu

Dane są ładunki elektryczne $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$, które nazwiemy źródłami. działają one na ładunek Q (nazwijmy go próbnym). Przy obliczaniu siły działającej na ładunek Q wykorzystuje się zasadę liniowej superpozycji.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$$

Równania Maxwella są liniowe względem pól \mathbf{E} i \mathbf{B} . Liniowość ta pozwala prowadzić setki rozmów telefonicznych za pomocą jednego połączenia mikrofalowego. W pewnych warunkach występują w niektórych materiałach również zjawiska nieliniowe. W późni lub w obszarach atomów i jąder atomowych fakty doświadczalne potwierdzają zasadę superpozycji liniowej. Nasuwają się przykłady urządzeń w których wykorzystana jest ta zasada (transformatory, linie przesyłowe, dyfrakcja, rozszczepienie światła).

Odstępstw od tej zasady można oczekiwać podczas zbliżenia naładowanych cząstek na bliskie odległości. Na tym poziomie natężenie pól elektrycznych staje się ogromne. Aby uniknąć nieskończonej energii własnej ładunku punktowego rozsądne wydaje się przypuszczenie, że zachodzi pewnego rodzaju nasycenie. Takie klasyczne nieliniowe teorie były rozważane (Born, Infeld 1934).

Występuje też kwantowa nieliniowość pól elektromagnetycznych. Zasada nieokreśloności dopuszcza możliwość wytworzenia przez dwa fotony pary elektron-pozyton, która następnie przekształca się w dwa inne fotony. Zjawisko to nosi nazwę rozpraszania fotonów na fotonach. Wirtualne procesy (tworzenie par) wyższych rzędów są odpowiedzialne za oddziaływanie pomiędzy polami EM nawet w nieobecności cząstek. Pojawia się też efekt polaryzacji próżni, wywołujący małe przesunięcie poziomów elektronowych w atomach, związane ze stałą subtelnej struktury

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}.$$

Wróćmy do znalezienia siły działającej na ładunek próbny Q w przypadku, gdy wszystkie ładunki źródłowe spoczywają a może przemieszczać się jedynie ładunek próbny (elektrostatyka). W przypadku jednego ładunku źródłowego q odpowiedź daje prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{\mathcal{R}}$$

gdzie

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \\ &= 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \end{aligned}$$

Wielokrotnie sprawdzano prawo Coulomba. Wyniki doświadczeń podaje się w dwojaki sposób:

- Zakłada się zależność siły od odległości w postaci

$$1/r^{2+\alpha}$$

Uzyskiwano różne wyniki oszacowania dla parametru α od $\alpha \leq 10^{-5}$ do 10^{-16} .

- Przyjmuje się potencjał elektrostatyczny w formie potencjału Yukawy

$$\frac{1}{r} \exp(-r/\lambda)$$

a następnie oszacowuje się zasięg $\lambda = h/\mu c$ poprzez masę spoczynkową lub energię spoczynkową fotonu. Wyniki pomiarów dają oszacowanie dla masy $\mu \leq 1,6 \cdot 10^{-50}$ kg lub energii spoczynkowej $\mu c^2 \leq 5 \cdot 10^{-16}$ eV.

W powyższym sensie oddziaływania kulombowskie i grawitacyjne mają nieskończony zasięg ($\lambda \rightarrow \infty$). Wynika on z wymiany bezmasowych cząstek: fotonów i grawitonów. Zależność $1/r^2$ w prawie Coulomba uważa się za następstwo zerowej masy spoczynkowej fotonów.

Czas życia wirtualnego fotonu można oszacować z zasady nieokreśloności Heisenberga

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h.$$

Przyjmując $\Delta E = \mu c^2$ dostaje się

$$\Delta t \sim \frac{h}{\mu c^2},$$

co daje zasięg

$$\lambda = c\Delta t = \frac{h}{\mu c}$$

Dla $\mu = 0$ zasięg λ staje się nieskończony.

Zadanie 1 Dlaczego ładunki elektronu i protonu są sobie dokładnie równe. Założyć, że różnią się o 1% i policzyć siłę odpychania dwóch miedzianych monet (zadanie z Feynmana). Wniosek – są równe bo inaczej nie byłoby molekuł.

Zadanie 2 Model atomu Thompsona. Pierwsza historycznie próba obliczenia rozmiaru atomu i wyjaśnienia linii widmowych, czyli obliczenia częstości drgań oscylatora. Rozszerzenie, kiedy pojawi się polaryzacja dielektryków. Przyjąć siłę anharmoniczną w nawiązaniu do optyki nieliniowej.

Zadanie 3 Rachunek z operatorem nabra. Przypomnienie wzorów z div grad, rot div, rot rot. Nabla w działaniu na różne funkcje \mathbf{r} .

6 1. WSTĘP

2

ELEKTROSTATYKA

2.1 Oddziaływania elektrostatyczne

Najpierw zajmiemy się siłą wywieraną przez ładunek q na ładunek Q , który nazywać będziemy ładunkiem próbnym. Problem ten opisuje prawo Coulomba

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathbf{R}},$$

gdzie

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',$$

a

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}.$$

2.2 Pole elektryczne

Siła wywierana na ładunek próbnny Q przez wiele ładunków źródłowych q_i ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathbf{R}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathbf{R}}_2 + \dots \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathbf{R}}_1 + \frac{q_2}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathbf{R}}_2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Inaczej

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$$

gdzie

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i^2} \hat{\mathbf{R}}_i$$

nazywa się natężeniem pola elektrycznego. Pole $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ można interpretować jako siłę działającą na jednostkowy ładunek próbny umieszczony w punkcie \mathbf{r} .

Można się zastanawiać, czym jest natężenie pola? Ponieważ nie ma w pełni zadawającej odpowiedzi poprzestaje się na podaniu sposobu pomiaru.

2.3 Ciągłe rozkłady ładunku

Jeśli ładunek jest rozłożony w sposób ciągły w pewnym obszarze, to zamiast sumą wypada posłużyć się całką

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathbf{R}} dq.$$

Dla objętościowego rozkładu ładunku z gęstością ρ mamy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathbf{R}} d^3r'.$$

Jeśli ładunek jest rozmieszczony w sposób ciągły wzdłuż krzywej z gęstością liniową λ , to

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathbf{R}} dl'.$$

Gdy ładunek rozłożony jest na powierzchni z gęstością powierzchniową σ , to

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathbf{R}} ds',$$

gdzie ds' jest infinitesimalnym elementem powierzchni.

2.4 Linie pola, strumień i prawo Gaussa

Rozważmy najprostrzy przypadek pojedynczego ładunku punktowego q , znajdującego się w początku układu współrzędnych

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Obliczmy strumień pola przez powierzchnię S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

gdzie $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem o kierunku normalnej $\hat{\mathbf{n}}$ do powierzchni dS . Jeśli S będzie powierzchnią zamkniętą, to w przypadku ładunku punktowego

$$\Phi_E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

nie zależy od \mathbf{r} .

Ogólnie

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{wew},$$

gdzie

$$Q_{wew} = \int_V \rho d^3r.$$

Jest to **prawo Gaussa w postaci całkowej**. Można je przekształcić korzystając z twierdzenia Gaussa o dywergencji

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d^3r,$$

które prowadzi do następującego związku

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d^3r.$$

Wzór ten obowiązuje dla dowolnego obszaru całkowania, co oznacza równość funkcji podcałkowych

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}).$$

W ten sposób dostaliśmy **prawo Gaussa w postaci różniczkowej**.

PRZYKŁAD

Obliczyć dywergencję pola od objętościowego rozkładu ładunku

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \rho(\mathbf{r}') d^3r'.$$

Ponieważ

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}),$$

więc musi być

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \delta(\mathbf{R}).$$

Symbol

$$\delta(\mathbf{R}) = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

oznacza potrójną deltę Diraca o własności

$$\int f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{R}) d^3 r' = f(\mathbf{r}).$$

PRZYKŁAD

Znaleźć wektor natężenia pola elektrycznego w odległości z nad środkiem odcinka o długości $2L$, naładowanego jednorodnie z gęstością liniową λ .

Rozwiązanie

$$dq = \lambda dx$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda dx}{\mathcal{R}^2} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \hat{\mathbf{z}},$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda dx}{x^2 + z^2} \cos \theta,$$

gdzie

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dx$$

$$E = \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{x}{z^2 \sqrt{x^2 + z^2}} \right|_0^L$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z \sqrt{L^2 + z^2}}$$

Przypadek $z \gg L$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{tot}}}{z^2}.$$

Przypadek $L \rightarrow \infty$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{z}.$$

2.5 Zastosowania prawa Gaussa

2.5.1 Symetria sferyczna

Znaleźć pole na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R i całkowitym ładunku q .

Obliczamy strumień przez kulistą “powierzchnię Gaussa” o promieniu $r > R$

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S E ds \\ &= E \oint ds = 4\pi r^2 E \end{aligned}$$

Prawo Gaussa głosi, że dla tej powierzchni, jak i dla jakiegokolwiek innej, $\Phi = q/\epsilon_0$, czyli

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} q,$$

skąd po uwzględnieniu kierunku i zwrotu wektora \mathbf{E} dostajemy

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Natężenie pola \mathbf{E} jest takie samo jak dla ładunku punktowego, skoncentrowanego w środku kuli

2.5.2 Symetria osiowa

Znaleźć \mathbf{E} wewnątrz długiego walca o radialnym rozkładzie gęstości ładunku

$$\rho = kr.$$

Obliczamy całkę

$$Q_{\text{wew}} = \int \rho d^3r'$$

we współrzędnych walcowych

$$\begin{aligned} Q_{\text{wew}} &= \int (kr') (r' d\varphi' dz' dr') \\ &= 2\pi kl \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2}{3}\pi klr^3. \end{aligned}$$

Obliczamy strumień dla powierzchni Gaussa w kształcie walca o długości l i promieniu r

$$\Phi = E(2\pi rl).$$

Wkład od płaskich części powierzchni walca został pominięty, ponieważ tam \mathbf{E} jest prostopadle do $d\mathbf{S}$. Z twierdzenia Gaussa dostajemy

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{3}\pi klr^3 \right),$$

skąd po uwzględnieniu radialnej symetrii pola

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} kr^2 \hat{\mathbf{r}},$$

a więc pole elektryczne wzrasta proporcjonalnie do r^2 . Jak pamiętamy dla cienkiej naładowanej nici natężenie pola E maleje jak $1/r$.

2.5.3 Symetria płaszczyznowa.

Dana jest nieskończona płaszczyzna naładowana ze stałą gęstością powierzchniową σ . Znaleźć natężenie pola elektrycznego.

Przyjmujemy powierzchnię Gaussa w kształcie pudełka, którego ścianki znajdują się w równej odległości nad i pod naładowaną płaszczyznę. Z symetrii układu wynika, że pole \mathbf{E} jest skierowane prostopadle do płaszczyzny. Boki pudełka nie wniosą żadnego wkładu. Strumień będzie pochodził od górnej i dolnej powierzchni pudełka

$$\oint \mathbf{E} ds = 2AE$$

Z twierdzenia Gaussa mamy

$$2AE = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A,$$

inaczej

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

Tym razem pole nie zależy od odległości od płaszczyzny.

2.5.4 Rotacja pola elektrostatycznego

Dla pola pochodzącego od ładunku punktowego umieszczonego w początku układu współrzędnych

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

obliczamy całkę krzywoliniową wzdłuż krzywej biegnącej od jakiegoś dowolnego punktu \mathbf{a} do punktu \mathbf{b}

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Najlepiej będzie wprowadzić współrzędne kuliste, dla których

$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{q}{r^2} dr \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right). \end{aligned}$$

Dla krzywej zamkniętej otrzymamy

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Stosując twierdzenie Stokesa

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

otrzymuje się

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Dla wielu ładunków punktowych wynik będzie taki sam, bo całkowite pole elektryczne \mathbf{E} jest wektorową sumą pól pochodzących od każdego z ładunków

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$$

Licząc rotację tego pola dostajemy

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_1 + \nabla \times \mathbf{E}_2 + \dots = 0.$$

Tak więc dla dowolnego statycznego rozkładu ładunków rotacja pola elektrycznego znika

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

2.6 Potencjał elektryczny

Ponieważ zawsze;

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$$

wobec tego możemy wyobrazić sobie, że

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

gdzie $V = V(\mathbf{r})$ jest funkcją skalarną. Ponieważ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, więc całka

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

nie zależy od wyboru drogi a jedynie od punktów \mathbf{a} i \mathbf{b} . Z drugiej strony, podstawowe twierdzenie dla gradientów pozwala napisać

$$- \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}).$$

Ważny jest wybór punktu odniesienia, mimo, że nie wpływa on na wartość pola \mathbf{E} , gdyż dla $V' = V + \text{const}$ $\nabla V' = \nabla V$, co oznacza równość $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$. Jeśli znajdziemy jakiś standardowy punkt odniesienia \mathcal{O} , dla którego możemy przyjąć $V = 0$ (na przykład w niekończoności), wtedy

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

staje się zależne jedynie od \mathbf{r} .

Do opisu pola elektrycznego możemy teraz używać zamiast wektora $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ funkcji skalarnej $V = V(x, y, z)$. Dlaczego? Punkt odniesienia w ∞ nie zawsze jest do przyjęcia. Nie mylić potencjału z energią potencjalną.

Ponieważ

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots [1\text{N}],$$

więc dzieląc przez Q mamy

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \dots \left[1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{niuton}}{\text{kulomb}} \right]$$

Całkując od wspólnego punktu doniesienia do \mathbf{r} widzimy ,że

$$V = V_1 + V_2 + \dots \left[1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 1\text{V} \right]$$

Potencjał, podobnie jak siła i natężenia pola, podlega zasadzie superpozycji. Tyle, że jest to suma algebraiczna.

2.6.1 Równanie Poissona i Laplace'a

Jaką postać przybiorą równania dla pola elektrycznego

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0\end{aligned}$$

Łącząc powyższe równania

$$-\nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

otrzymujemy równanie Poissona

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Otrzymaliśmy równanie Poissona. W obszarach bez ładunku przechodzi ono w równanie Laplace'a

$$\Delta V = 0$$

2.6.2 Potencjał ładunku zlokalizowanego

Jeśli przyjmiemy za punkt odniesienia punkt w nieskończoności

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

a ładunek punktowy znajduje się w początku układu współrzędnych, to

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{q}{r} \right|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathcal{R}_i}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d^3r'$$

Jest to odwrócenie równania Poissona, czyli poniekąd jego rozwiązanie w przypadku ładunków rozłożonych z gęstością ρ . Warto porównać ten wynik ze wzorem na natężenie pola elektrycznego

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathbf{R}} d^3r'.$$

Pamiętajmy, o punkcie odniesienia w nieskończoności.

2.6.3 Warunki graniczne

W natężeniu pola elektrycznego występuje skok przy przekraczaniu powierzchni, na której zgromadzony jest ładunek powierzchniowy

$$E_{\text{nad}}^{\perp} - E_{\text{pod}}^{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma,$$

co wynika z przykładu dla naładowanej płaszczyzny. Ze znikania rotacji otrzymuje się

$$\mathbf{E}_{\text{nad}}^{\parallel} = \mathbf{E}_{\text{pod}}^{\parallel}.$$

Oba warunki można zebrać w formie jednego wzoru

$$\mathbf{E}_{\text{nad}} - \mathbf{E}_{\text{pod}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}},$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem jednostkowym, prostopadłym do powierzchni, skierowanym od “dołu” do “góry”.

W odróżnieniu od pola \mathbf{E} potencjał jest ciągły na dowolnej powierzchni granicznej, ponieważ

$$V_{\text{nad}} - V_{\text{pod}} = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow 0$$

więc

$$V_{\text{nad}} = V_{\text{pod}}.$$

Jednak *gradient* potencjału wykazuje taką samą nieciągłość, jak pole \mathbf{E} . Ponieważ $\mathbf{E} = -\nabla V$, więc

$$\frac{\partial V_{\text{nad}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{pod}}}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma,$$

przy czym

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

2.7 Praca przy przesunięciu ładunku

$$W = -Q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q [V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})]$$

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = \frac{W}{Q}$$

Praca przesunięcia ładunku Q z dużej odległości wynosi

$$W = Q [V(\mathbf{r}) - V(\infty)].$$

Jeśli $V(\infty)$ przyjmiemy za potencjał odniesienia, to

$$W = Q V(\mathbf{r}).$$

Możemy powiedzieć, że potencjał jest energią potencjalną - czyli pracą - jaką należy wykonać, aby utworzyć dany rozkład ładunków, przypadająca na jednostkę ładunku.

2.7.1 Energia układu ładunków

Spróbujemy ustalić, jaką pracę należy wykonać, aby utworzyć układ kilku ładunków punktowych. Umieszczenie pierwszego ładunku nie wymaga pracy. Dla drugiego mamy

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{12}} \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{23}} \right)$$

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3}{\mathcal{R}_{34}} \right).$$

Całkowita praca, konieczna do utworzenia układu 4 ładunków opisana jest sumą

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{\mathcal{R}_{12}} + \frac{q_1 q_3}{\mathcal{R}_{13}} + \frac{q_1 q_4}{\mathcal{R}_{14}} + \frac{q_2 q_3}{\mathcal{R}_{23}} + \frac{q_2 q_4}{\mathcal{R}_{24}} + \frac{q_3 q_4}{\mathcal{R}_{34}} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{\mathcal{R}_{ij}}. \quad (2.1)$$

Inaczej

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\mathcal{R}_{ij}}$$

lub

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\mathbf{r}_i). \quad (2.2)$$

Taką pracę należy wykonać, aby utworzyć układ ładunków punktowych. Jest to energia zgromadzona w danej konfiguracji ładunków.

2.7.2 Energia ci głęgo rozkładu ładunków

W przypadku objętościowego rozkładu ładunków wzór (2.2) przybiera postać

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d^3r.$$

Ponieważ

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$

więc

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d^3r,$$

skąd, wykorzystując twierdzenie o dywergencji dla pola $V \mathbf{E}$ otrzymuje się

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) d^3r + \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right],$$

co można zapisać jako

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int E^2 d^3r + \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right].$$

Przy $S \rightarrow \infty$ całka objętościowa wzrasta a całka powierzchniowa zmierza do zera. W ten sposób dochodzimy do wyniku

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_\infty} E^2 d^3r,$$

króry pozwala utożsamić funkcję $\epsilon_0 E^2/2$ z objętościową gęstością energii pola elektrycznego

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2.$$

Pewna własność ostatniego wzoru może wywołać zdziwienie. Gęstość energii pola w jest z definicji dodatnia, zatem całka objętościowa nie może być ujemna. Jest to w sprzeczności ze wzorem (2.1), który daje ujemną energię dla ładunków o przeciwnych znakach. Powodem tej sprzeczności jest pominięcie tzw. energii własnej we wzorze (2.1). Widać to na przykładzie dwóch ładunków, które wytwarzają w punkcie \mathbf{r} pole

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\mathcal{R}_1^2} \hat{\mathbf{R}}_1 + \frac{q_2}{\mathcal{R}_2^2} \hat{\mathbf{R}}_2 \right).$$

Odpowiednia gęstość energii wynosi

$$w = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{\mathcal{R}_1^4} + \frac{q_2^2}{\mathcal{R}_2^4} \right) + \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{\mathcal{R}_1^2 \mathcal{R}_2^2} \hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 \right).$$

Pierwszy składnik jest energią własną. Drugi składnik daje energię potencjalną, zawartą we wzorze (2.1), co można sprawdzić obliczając całkę

$$W = \frac{q_1 q_2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathbf{R}}_1 \hat{\mathbf{R}}_2}{\mathcal{R}_1^2 \mathcal{R}_2^2} d^3 r \quad (2.3)$$

po całej przestrzeni wypełnionej przez pole (zadanie 7).

Zadanie 4 Obliczyć "klasyczny promień elektronu", to znaczy scałkować gęstość energii pola elektrycznego wytwarzanego przez elektron i przyrównać go, zgodnie ze wzorem Einsteina, do mc^2 . Znajac masę elektronu obliczyć jego promień. Uzyskany wynik można uważać za granicę stosowalności elektrodynamiki klasycznej.

Zadanie 5 Obliczyć energię jonizacji atomu wodoru. Zadając gęstość ładunku dla stanu podstawowego $\rho = \exp(-r/a_B)$, gdzie a_B jest promieniem pierwszej orbity Bohra, wyliczyć energię pola wytwarzanego przez elektron. Wynik zgadza się z mechaniką kwantową.

Zadanie 6 Dla nabrania wprawy w posługiwaniu się operatorem "nabla" rozważyc dipol w przybliżeniu dużych odległości. Określić linie ekwopotencjalne i linie sił pola w układzie biegunowym.

Zadanie 7 Wykazać, że całkowanie po nieskończonej objętości we wzorze (2.3) prowadzi do wyniku

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\mathcal{R}_{12}}.$$

Wskazówka: Wprowadzić zamiast \mathbf{r} nową zmienną całkowania $\rho = \mathbf{R}_1 / \mathcal{R}_{12}$ oraz skorzystać z tożsamości

$$\nabla_\rho \frac{1}{|\rho + \hat{\mathbf{R}}_{12}|} = - \frac{\rho + \hat{\mathbf{R}}_{12}}{|\rho + \hat{\mathbf{R}}_{12}|^3}.$$

2.7.3 Trzy typy relacji

Pojawienie się trzech powiązanych ze sobą wielkości $\rho \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow V$, związanych odpowiednio z ładunkiem, polem elektrostatycznym i potencjałem skalarnym, prowadzi do trzech typów relacji:

$$(\mathbf{E} : \rho) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = 1/(4\pi\epsilon_0) \int (\rho/\mathcal{R}^2) \hat{\mathbf{R}} d^3 \mathbf{r}' \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases},$$

$$(\mathbf{E} : V) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla V \\ V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{cases},$$

$$(V : \rho) \quad \begin{cases} V = 1/(4\pi\epsilon_0) \int (\rho/\mathcal{R}) d^3 \mathbf{r}' \\ \Delta V = -\rho/\epsilon_0 \end{cases}.$$

2.8 Przewodniki

Dla metali obowiązuje prawo Ohma

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

gdzie σ jest współczynnikiem przewodnictwa (nie mylić z gęstością powierzchniową ładunku), a $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ jest wektorem gęstości (objętościowej) prądu elektrycznego ładunków poruszających się ze średnią prędkością \mathbf{v} . Za \mathbf{J} kryje się ładunek elektryczny przepływający w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do \mathbf{v} , czyli prąd przypadający na jednostkowy przekrój poprzeczny przewodnika. W elektrostatystyce nie ma prądów, czyli $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Stąd wynika szereg własności przewodników.

1. We wnętrzu przewodnika $\mathbf{E} = 0$. W izolatorach elektrony są związane, natomiast w przewodniku metalicznym elektrony walencyjne z każdego atomu mogą przemieszczać się swobodnie wewnątrz całej objętości materiału. Idealnym przewodnikiem byłby materiał o nieskończonej liczbie ładunków. Wiele metali ma własności zbliżone do idealnych przewodników.
2. Pole wytworzone przez ładunki indukowane kompensuje pole zewnętrzne. Gęstość ładunku znika we wnętrzu przewodnika. Z równania $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ przy $\mathbf{E} = 0$ wynika, że w każdym miejscu wewnątrz przewodnika $\rho = 0$.
3. Niekompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni.
4. Potencjał w przewodniku jest stały, gdyż $\mathbf{E} = -\nabla V$ jest równe zero dla $V = \text{const}$.
5. W pobliżu powierzchni \mathbf{E} jest prostopadłe do powierzchni (czyli ma kierunek normalnej $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$).

Dla dwóch przewodzących kul o różnych promieniach, połączonych cienkim przewodem, można wykorzystać dwie proporcje $V \sim q/r$ oraz $\sigma R^2 \sim q$. Ponieważ ich potencjały są jednakowe

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

oraz

$$\frac{\sigma_1 R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 R_2^2}{R_2},$$

skąd

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2.$$

Ogólnie

$$\sigma R = \text{const.}$$

Małemu promieniowi krzywizny \mathbf{R} przewodnika odpowiada duża gęstość powierzchniowa ładunku σ , a więc duże natężenie pola \mathbf{E} na zewnątrz. Energia naładowanego przewodnika przybiera wartość minimalną, gdy ładunek rozmieszczony jest na jego powierzchni.

2.8.1 Wn ka wewn trz przewodnika

Jeśli wydrążymy przewodnik i we wnęce nie umieścimy ładunku, to pole w niej będzie równe $\mathbf{E} = 0$. Nie będzie również zależało od kształtu wnęki. Żadne pole nie wniknie do wnęki, gdyż zostaje skompensowane przez ładunki indukowane.

Można wydrążyć wnętrze przewodnika. Pole nadal będzie równe zeru, jeśli nie ma wewnątrz ładunku. **Na powierzchni wnęki nie może występować ładunek powierzchniowy.** Jesteśmy bezpieczni w samochodzie w czasie burzy. Przewodnik jest doskonałym ekranem przed zewnętrznymi polami. Nawet siatka metalowa wystarcza. Czułe przyrządy umieszcza się w uziemionej *klatce Faradaya*

2.8.2 Ładunki powierzchniowe

Dla powierzchni

$$\mathbf{E}_{zew} - \mathbf{E}_{wew} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}.$$

W przewodniku $\mathbf{E}_{wew} = 0$, a \mathbf{n} jest prostopadły do powierzchni, więc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{pow} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.8.3 Układ przewodników

W przypadku układu wielu przewodników potencjał każdego z nich przestaje się wyrażać prostym wzorem, a przyjmuje postać

$$V_i = \sum_j \alpha_{ij} q_j$$

gdzie q_j jest ładunkiem zgromadzonym na przewodniku o potencjale V_j , a α_{ij} są współczynnikami zależnymi od geometrii rozkładu przewodników. Powyższy układ równań można odwrócić

$$q_i = \sum_j C_{ij} V_j. \tag{2.5}$$

Współczynniki C_{ij} nazywają się współczynnikami indukcji, a dla $i = j$ współczynniki $C_{ii} = C_i$ nazywają się pojemnościami. Dla pojedynczego przewodnika

$$C = \frac{q}{V}.$$

Jest to wielkość czysto geometryczna. Przypuśćmy, że mamy dwa przewodniki. Na jednym umieszczamy ładunek $+q$ a na drugim ładunek $-q$. Wtedy

$$V = V_+ - V_-.$$

Układ dwóch przewodników, z których jeden jest całkowicie ekranowany przez drugi, nosi nazwę kondensatora. Ponieważ $V = q/C$ energia związana z naładowaniem układu dwóch przewodników wynosi

$$W = \int_0^q (V - 0) dq = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Otrzymany wzór można zapisać w postaci

$$W = \frac{1}{2} C V^2,$$

gdzie V jest końcowym potencjałem (różnicą potencjałów) dwóch przewodników. Energię potencjalną układu przewodników

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$$

można zgodnie ze wzorem (2.5) przedstawić w postaci

$$W = \frac{1}{2} \sum \sum C_{ij} V_i V_j.$$

2.9 Specjalne metody elektrostatyki

Rozwinięto specjalne metody rozwiązywania równań Laplace'a i Poissona w 1, 2 i 3 wymiarach. Udowodniono szereg twierdzeń matematycznych poszukując jednoznacznych rozwiązań dla określonych warunków granicznych i brzegowych. Pojawia się pytanie: przy jakich warunkach istnieje jednoznaczne, regularne i ciągłe względem warunków brzegowych (czyli mające sens fizyczny) rozwiązanie powyższych równań w ograniczonej obszarze?

Należałoby pokazać, że wewnątrz objętości \mathcal{V} rozwiązania równania

$$\Delta V = -\rho/\epsilon_0$$

spełniające warunki brzegowe Dirichleta (V) lub Neumana ($\partial V/\partial r$) na zamkniętej powierzchni S ograniczającej tę objętość są jednoznaczne. Innymi słowy, należy pokazać, że nie ma dwóch rozwiązań V_1 i V_2 , spełniających te same warunki brzegowe dla których

$$U = V_1 - V_2$$

byłoby różne od zera wewnątrz \mathcal{V} . Ponadto nie istnieje na ogół rozwiązanie równania Poissona, spełniające warunki Cauchy'ego, polegające na jednoczesnym określeniu zarówno V jak i $\partial V/\partial r$ na powierzchni zamkniętej. Te i tym podobne problemy są dyskutowane w książkach poświęconych rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych.

2.9.1 Metody oparte na funkcjach Greena

Wykorzystuje się dwie tożsamości Greena. Często korzysta się z całej klasy funkcji zwanych funkcjami Greena. Jedną z nich już poznaliśmy. Równanie

$$\Delta V = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.6}$$

dla ładunku punktowego przyjmuje postać

$$\Delta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(r) \implies \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(r).$$

Funkcja Greena o postaci

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\mathcal{R}} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right],$$

przy czym $\Delta F = 0$, spełnia równanie

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie. Może być ona wykorzystana do znalezienia rozwiązania równania (2.6) w postaci transformacji całkowej

$$V(r) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d^3\mathbf{r}'.$$

2.9.2 Metoda separacji zmiennych

Rozpocznijmy od przykładu dwuwymiarowego równania Laplace'a we współrzędnych kartezjańskich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{2.7}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$V(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.8)$$

Jest to ograniczenie, które pozwoli nam uzyskać pewną część możliwych rozwiązań. Po podstawieniu (2.8) do (2.7) otrzymuje się

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \implies f(x) + g(y) = 0$$

dla wszystkich x i y . Równość taka znajdzie tylko wtedy, gdy f i g są stałymi, czyli

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2, \quad C_1 + C_2 = 0.$$

Inaczej

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y.$$

Równanie Laplace'a we współrzędnych kulistych przyjmuje postać

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Dla przypadku symetrii osiowej, gdy $V(r, \theta)$ nie zależy od φ

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Poszukujemy rozwiązań w postaci iloczynu

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Prowadzi to do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) &= l(l+1) \\ \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= -l(l+1). \end{aligned}$$

Oznaczenie stałej przez $l(l+1)$ nie jest tu istotne. Rozwiązanie powyższych równań ma postać

$$\begin{aligned} R(r) &= Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}, \\ \Theta(\theta) &= P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Rozwiązanie na $R(r)$ można sprawdzić przez podstawienie. Drugie równanie jest trudniejsze do rozwiązania. Trzeba posłużyć się wielomianami Legendre'a P_l , które dane są w postaci wzoru Rodriguesa

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l.$$

W szczególności

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

Rozwiązanie równania Laplace'a dla potencjału o symetrii osiowej ma postać

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

2.9.3 Rozwinięcie multipolowe

Ciekawy wynik: Wprowadźmy funkcję

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta') \quad (2.9)$$

do wyrażenia na potencjał w przypadku ciągłego rozkładu ładunku o gęstości ρ

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Powyższy wzór daje się zapisać w postaci tak zwanego *rozwinięcia multipolowego*

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

względem potęg $1/r$.

Jak sprawdzić relację (2.9)? Zauważmy, że

$$\mathcal{R}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$$

$$\mathcal{R}^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' \right]$$

podstawiając

$$\epsilon = \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right)$$

otrzymamy

$$\mathcal{R} = r\sqrt{1 + \epsilon}.$$

Dla $r \gg r'$ mamy $r'/r \ll 1$, $\epsilon \ll 1$. Wobec wyrażenie $1/\sqrt{1 + \epsilon}$ tego możemy rozwinąć na szereg względem ϵ

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon}} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \dots$$

ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon}} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \epsilon)^{3/2}} \\ \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{d\epsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon}} &= \frac{3}{8} \frac{1}{(1 + \epsilon)^{5/2}} \end{aligned}$$

itd. Wykorzystując powyższe rozwinięcie oraz wprowadzając r , r' i θ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta'\right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

Po wymnożeniu dostajemy

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 (5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta') + \dots \right]$$

2.9.4 Metoda obrazów

Metodę obrazów można najprościej przedstawić na przykładzie ładunku q umieszczonego w odległości d nad nieskończoną płaszczyzną przewodzącą. Zapomnijmy na chwilę o naszym problemie. Rozważmy układ złożony z dwóch ładunków, ładunku q w punkcie $(0, 0, d)$ oraz ładunku $-q$ w punkcie $(0, 0, -d)$ bez płaszczyzny przewodzącej. Odpowiedni potencjał ma postać

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right].$$

Tym sposobem odgadnięte zostało rozwiązanie równania Poissona, które dla $z > 0$ spełnia następujące warunki brzegowe

1. $V = 0$ dla $z = 0$,
2. $V \rightarrow 0$ dla $r^2 \gg d^2$,

a jedynym ładunkiem w tym obszarze jest ładunek q w punkcie $(0, 0, d)$. Jest to również rozwiązanie naszego pierwotnego zagadnienia. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań gwarantuje nam, że nie istnieje inne rozwiązanie spełniające te same warunki brzegowe.

Przy okazji można policzyć ładunek powierzchniowy. Ponieważ $E_z = -\partial V/\partial z$ jest prostopadłe do płaszczyzny przewodzącej, zgodnie ze wzorem (2.4)

$$\sigma(x, y) = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}},$$

a ładunek całkowity indukowany na płaszczyźnie wynosi

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\varphi \\ &= \left. \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right|_0^\infty = -q. \end{aligned}$$

Energia pojedynczego ładunku nad płaszczyzną przewodzącą wynosi

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{4d},$$

co stanowi połowę energii oddziaływania ładunku q i $-q$. Dlaczego?

2.10 Pola elektryczne w materii

2.10.1 Polaryzacja elektryczna

Mówiliśmy już o przewodnikach. Materia występuje w wielu postaciach, które w różny sposób reagują na pole elektryczne. Ze względu na własności w polu elektrycznym materiały można z grubsza podzielić na przewodniki i izolatory (inaczej dielektryki). W dielektrykach wszystkie ładunki są związane z konkretnymi atomami i cząsteczkami. W związku z tym mają ograniczoną swobodę ruchu. Pole elektryczne może rozciągać i obracać atom lub cząsteczkę. Są to dwa mechanizmy zmiany rozkładu ładunku w dielektrykach.

Oba mechanizmy zmiany rozkładu ładunku powodują uzyskanie małego momentu dipolowego przez atom lub cząsteczkę wprost proporcjonalnego do przyłożonego pola elektrycznego

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \tag{2.10}$$

przy czym α nazywa się polaryzowalnością atomową. Jej wartość zależy od szczegółów budowy atomów badanego materiału dielektrycznego. Przykładowe wartości $\alpha/4\pi\epsilon_0$ w $10^{-30}m^3$ podano poniżej

H	He	Li	Be	C	Cs
0,667	0,205	24,3	5,60	1,76	59,6

Możemy wyobrazić sobie, co się dzieje z kawałkiem dielektryka, który zostaje umieszczony w polu elektrycznym. Następuje indukowanie małych momentów dipolowych, skierowanych zgodnie z polem. Jeśli materiał składa się z cząsteczek polarnych, to na każdy trwały dipol zacznie działać moment siły.

Pojawia się wiele małych dipoli skierowanych zgodnie z kierunkiem pola. Pojawi się polaryzacja materiału, którą wygodnie opisuje się przez podanie momentu dipolowego \mathbf{P} przypadającego na jednostkę objętości. Wektor \mathbf{P} nazywa się polaryzacją elektryczną. Mechanizm prowadzący do powstania \mathbf{P} jest dosyć złożony. Tutaj interesuje nas pole, jakie wytwarza kawałek spolaryzowanego materiału.

Pole ciała spolaryzowanego

Nie chodzi nam o pole, które było przyczyną polaryzacji. Przyjmujemy, że znamy moment dipolowy przypadający na jednostkę (dość dużej w stosunku do rozmiarów cząsteczek) objętości. Jakie pole wytwarza spolaryzowany materiał?

Dla pojedynczego dipola znamy wzór na potencjał, który możemy zapisać w postaci

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{p}}{\mathcal{R}^2}$$

i zastosować do naszego problemu

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d^3r'.$$

Wygodnie będzie wykorzystać wynik

$$\nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2},$$

przy czym różniczkowanie wykonujemy względem źródeł pola o współrzędnych \mathbf{r}' . Można więc napisać

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) d^3r'.$$

Przypomnijmy sobie regułę różniczkowania

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= f(\nabla' \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla' f \\ \operatorname{div}(f\mathbf{A}) &= f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} f \end{aligned}$$

Po jej wykorzystaniu dostaje się

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{R}} \right) d^3r' - \int_V \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d^3r' \right].$$

Twierdzenie o dywergencji umożliwia zapis potencjału w postaci

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{\mathcal{R}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla' \cdot \mathbf{P} d^3r',$$

która sugeruje następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \sigma_{zw} &= \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{bo } d\mathbf{S}' = \hat{\mathbf{n}} dS' \\ \rho_{zw} &= -\nabla \cdot \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Tym samym można napisać

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_{zw}}{\mathcal{R}} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{zw}}{\mathcal{R}} d^3r'.$$

Zamiast całkować wkłady od dipoli możemy znaleźć ładunki związane i obliczyć wytwarzane przez nie pola poznanymi już metodami.

Przykład

Kula jednorodnie spolaryzowana nie posiada objętościowego ładunku związanego, bo $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Wystąpi jednak ładunek powierzchniowy

$$\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta.$$

Należy znaleźć pole wytworzone przez ładunek o takiej gęstości powierzchniowej. Posługując się wielomianami Legenre'a otrzymujemy

$$V(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta, \quad r \leq R,$$

$$V(r, \theta) = \frac{p}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, \quad r \geq R,$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{dla } r \leq R.$$

Na zewnątrz potencjał można zapisać jako

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad r \geq R,$$

gdzie

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = P \cos \theta.$$

Jest to pole idealnego dipola umieszczonego w środku kuli.

2.10.2 Fizyczna interpretacja ładunków zwi zanych

Jak pamiętamy potencjał pojedynczego dipola (idealnego) ma postać

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\widehat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{p}}{\mathcal{R}^2}.$$

Wprowadziimy moment dipolowy na jednostkę objętości \mathbf{P} . Potencjał pochodzący od ciała spolaryzowanego zapisaliśmy jako

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\widehat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d^3r'. \quad (2.11)$$

Formalne przekształcenia doprowadziły do następującej postaci

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \widehat{\mathbf{n}}}{\mathcal{R}} ds - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \mathbf{P}) d^3r' \quad (2.12)$$

gdzie \mathcal{V} oznacza objętość ciała spolaryzowanego, ograniczona powierzchnią S . Wewnątrz rozłożony jest związany ładunek objętościowy o gęstości

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

a na powierzchni ładunek o gęstości powierzchniowej

$$\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \widehat{\mathbf{n}}.$$

Spróbujmy wyjaśnić poglądowo otrzymany wynik. Wydzielmy z objętości V długi ciąg dipoli

$$- + - +, \dots, - + - + = - +, \dots, - +$$

Ładunki wewnątrz tego ciągu znoszą się. Pozostają dwa nieskompensowane ładunki na początku i na końcu. Moment dipolowy $p = qd$ można zapisać na dwa sposoby

$$qd = PAd,$$

gdzie Ad jest objętością pręta. Widać stąd, że

$$q = P \cdot A.$$

Jeśli pręt jest ścięty ukośnie, to zwiększy się powierzchnia $A_{końca}$, gdyż $A_{końca} \cos \theta = A$, natomiast q pozostanie niezmienione

$$q = P \cdot A_{końca} \cos \theta,$$

skąd

$$\frac{q}{A_{końca}} = P \cdot \cos \theta.$$

Ponieważ $\mathbf{P} \parallel \hat{\mathbf{z}}$, więc $P \cdot \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Tym samym widzimy, że gęstość ładunku związanego $q/A_{końca}$ jest wywołana pojawieniem się polaryzacji \mathbf{P} zgodnie z otrzymanym tu związkiem

$$\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

który potwierdza wcześniejszy formalny wynik. Jeśli polaryzacja nie jest jednorodna, to dodatkowo ładunki związane pojawią się wewnątrz ośrodka, co wyjaśnia rysunek rozbiegających się dipoli.

Nieskompensowany ładunek ujemny $\int \rho_{zw} d^3r$ jest równy co do wartości ładunkowi dodatniemu na powierzchni S

$$\int_V \rho_{zw} d^3r = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Gaussa o dywergencji całkę powierzchniową można zastąpić całką objętościową z $\nabla \cdot \mathbf{P}$. Ponieważ wynik ten jest słuszny dla dowolnej objętości \mathcal{V} mamy zatem

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

co potwierdza drugą część wzoru (2.12) na potencjał.

Powrót do przykładu z kulą

Popatrzmy w podobny sposób na spolaryzowaną kulę z poprzedniego paragrafu. Wprowadzamy dwie kule: jedną – wypełnioną jednorodnie ładunkiem dodatnim i drugą – ładunkiem ujemnym. Polaryzacja odpowiada przesuwaniu się tych kul względem siebie. W ten sposób tworzy się “czapa” ładunku dodatniego i ujemnego.

Można obliczyć pole w obszarze przekrywania się dwóch jednorodnie naładowanych kul

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{d}}{R^3},$$

gdzie q jest ładunkiem dodatnio naładowanej kuli, \mathbf{d} jest wektorem łączącym środek ujemnie naładowanej kuli ze środkiem kuli naładowanej dodatnio, a R promieniem kuli. Wprowadzając wektor polaryzacji \mathbf{P} jako

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \mathbf{P} = q\mathbf{d}$$

otrzymujemy wynik z wcześniejszego przykładu

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

Na zewnątrz pole jest takie jak od dwóch ładunków punktowych o różnych znakach. W dużej odległości od kul będzie to pole dipola o potencjale

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

2.10.3 Rzeczywiste pole w dielektryku

W dotychczasowych rozważaniach milcząco zakładaliśmy, że mamy do czynienia z dipolami idealnymi. Prawdziwy dielektryk składa się z dipoli fizycznych. Przyjęto też założenie, że dyskretne dipole cząsteczek można opisać ciągłym rozkładem objętościowym momentu dipolowego $\mathbf{P}(\mathbf{r})$.

Dla punktów \mathcal{R} daleko od dielektryka odległości od ładunków dodatnich i ujemnych są wystarczająco małe, aby zaniedbać ziarnistość źródeł pola i uznać wkład dipolowy za dominujący. Argumentacja ta nie funkcjonuje dla punktów wewnątrz dielektryka. Wypada zastanowić się w tym miejscu nad zasadnością zastosowanego podejścia.

Pole elektryczne w materii na poziomie mikroskopowym jest bardzo skomplikowane. Uwzględnienie prawdziwego pola jest zadaniem trudnym i nie zawsze przydatnym. Podstawowe własności fizyczne materii nie zależą od mikroskopowych fluktuacji pola elektrycznego. Można ograniczyć się do pól uśrednionych na wystarczająco dużym obszarze względem pól atomowych. Tak wygładzone pole nie będzie zawierało fluktuacji atomowych, ale powinno zawierać zmiany w skali makroskopowej. Takie pola uważa się za pola wewnątrz materii.

Do uśredniania wybieramy obszar kuli, która jest mała względem rozmiarów dielektryka, ale zawiera np. kilka tysięcy atomów. Wtedy pole \mathbf{E} w środku kuli (w punkcie \mathbf{r}) będzie składać się z dwóch części

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{zew} + \mathbf{E}_{wew},$$

gdzie \mathbf{E}_{zew} jest uśrednionym polem od wszystkich ładunków znajdujących się na zewnątrz kuli, a \mathbf{E}_{wew} jest równe średniemu polu od ładunków wewnątrz kuli. Można udowodnić, że uśrednione po kuli pole od ładunków na zewnątrz, czyli \mathbf{E}_{zew} jest równe polu, jakie te ładunki wytwarzają w środku kuli. W odniesieniu do dipoli, które są wystarczająco daleko od środka kuli, ma uzasadnienie wzor

$$V_{zew} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{zew} \frac{\widehat{\mathcal{R}}\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}^2} d^3r'. \quad (2.13)$$

Dipoli wewnątrz kuli nie można potraktować podobnie, gdyż są zbyt blisko środka kuli. Ponieważ potrzebne jest nam pole średnie, można pokazać, że nie zależy ono od szczegółów rozkładu ładunku, a jedynie od całkowitego momentu dipolowego \mathbf{p}

$$\mathbf{E}_{wew} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}.$$

Istotny jest całkowity moment dipolowy $\mathbf{p} = (4/3)\pi R^3\mathbf{P}$. Kula jest mała, więc \mathbf{P} nie będzie się znacząco zmieniać i pole \mathbf{E}_{wew} jest takie, jak w środku jednorodnie spolaryzowanej kuli: $-(1/3\epsilon_0)\mathbf{P}$. Całkę w (2.13) można rozszerzyć na całą objętość dielektryka. Istota przeprowadzonego rozumowania jest następująca: Pole uśrednione po dowolnej kuli (pochodzące od ładunków wewnątrz) jest takie samo, jak pole w środku kuli jednorodnie spolaryzowanej.

Oczywiście, obie kule mają taki sam moment dipolowy. Jeżeli ważne jest dla nas uśrednione pole, a nie prawdziwy mikroskopowy rozkład ładunku, możemy posłużyć się gładkim rozkładem idealnych dipoli, jak we wzorze (2.11). Kula wykorzystana w przedstawionych rozważaniach nie powinna mieć wpływu na wynik końcowy.

2.10.4 Prawo Gaussa w obecności dielektryków

Pole wytwarzane przez polaryzację \mathbf{P} jest polem ładunków związanych o gęstości $\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ wewnątrz oraz $\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ na powierzchni dielektryka. Wszystkie pozostałe ładunki będziemy nazywać swobodnymi. Całkowita gęstość ładunku w dielektryku ma postać

$$\rho = \rho_{zw} + \rho_{sw},$$

co prowadzi do prawa Gaussa

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{sw}.$$

Powyższy wzór można też zapisać

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{sw},$$

co sugeruje oznaczenie

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Wektor \mathbf{D} nazywa się wektorem indukcji elektrycznej. Prawo Gaussa z użyciem wektora \mathbf{D} przyjmuje postać

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw},$$

lub w postaci całkowej

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q_{sw} \quad (2.14)$$

Podobieństwo \mathbf{D} do \mathbf{E} jest zwodnicze. Nawet, gdy $\rho_{sw} = 0$ nie oznacza to, że $\mathbf{D} = 0$. Przykładem może być elektret. Również $\nabla \times \mathbf{D}$ nie musi zniknąć z powodu $\nabla \times \mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ gdyż

$$\nabla \times \mathbf{D} = \varepsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{P}) = \nabla \times \mathbf{P} \quad (2.15)$$

2.10.5 Warunki brzegowe (graniczne)

Warunki brzegowe dla pola \mathbf{D} można uzyskać z prawa Gaussa (2.14) w przypadku składowej prostopadłej

$$D_{nad}^\perp - D_{pod}^\perp = \sigma_{sw} \quad (2.16)$$

a z (2.15) w przypadku skoku składowej równoległej

$$\mathbf{D}_{nad}^{\parallel} - \mathbf{D}_{pod}^{\parallel} = \mathbf{P}_{nad}^{\parallel} - \mathbf{P}_{pod}^{\parallel}.$$

Jak pamiętamy dla pola \mathbf{E} :

$$E_{nad}^{\perp} - E_{pod}^{\perp} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$$

$$\mathbf{E}_{nad}^{\parallel} - \mathbf{E}_{pod}^{\parallel} = 0.$$

Dielektryki liniowe

Polaryzacja \mathbf{P} jest zwykle wynikiem działania pola elektrycznego. Dla wielu materiałów, jeśli pole \mathbf{E} nie jest zbyt silne

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

Współczynnik proporcjonalności χ_e nazywa się *podatnością elektryczną ośrodka*. Materiały, dla których słuszne jest równanie (2.17) nazywają się dielektrykami liniowymi. Wartość χ_e zależy od struktury elektronowej materiału i temperatury. Pole \mathbf{E} jest polem od wszystkich ładunków. Zauważmy, że umieszczenie dielektryka w polu np. \mathbf{E}_0 spowoduje polaryzację, która wytworzy dodatkowe pole \mathbf{E} , którego nie ma w równaniu (2.17). Za równaniem tym kryje się proces samouzgodnienia pól \mathbf{E} i \mathbf{P} . Pomocne jest tu wykorzystanie pola indukcji elektrycznej \mathbf{D} , którego źródłami są ładunki swobodne. W ośrodkach liniowych lub może w przybliżeniu liniowym, z definicji

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

wynika proporcjonalność

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Wielkość

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

nazywa się *przenikalnością elektryczną ośrodka*. Czasem do opisu ośrodka używa się innej wielkości ε_r zwanej względną przenikalnością ośrodka. Wtedy równanie powyższe ma postać

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Wartość ε_r dla różnych ośrodków:

Ośrodek	Próżnia	Sól	Woda	Lód
ε_r	1	5,9	80,1	99($-30^{\circ}C$)

W przypadku kryształów $\chi \Rightarrow \chi$ jest tensorem i $\mathbf{P} \nparallel \mathbf{E}$. Ośrodek taki jest anizotropowy.

2.10.6 Zagadnienia brzegowe w obecności dielektryków liniowych

W jednorodnym dielektryku liniowym

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

ponieważ $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ oraz $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$, więc

$$\rho_{zw} = -\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D},$$

stąd

$$\rho_{zw} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_{sw}.$$

Brak ładunków swobodnych wewnątrz dielektryka, to $\rho = 0$. Nie znikająca gęstość ładunku może jedynie występować na powierzchni dielektryka. W takim przypadku potencjał w dielektryku spełnia równanie Laplace'a i można skorzystać z narzędzi elektrostatyki przystosowanych do tego celu. Wygodniej jest czasami przetransformować warunki (2.16) do postaci zawierającej ładunki swobodne (a nie całkowite)

$$\varepsilon_{nad} E_{nad}^\perp - \varepsilon_{pod} E_{pod}^\perp = \sigma_{sw}$$

równoważne

$$\varepsilon_{nad} \frac{\partial V}{\partial n} - \varepsilon_{pod} \frac{\partial V}{\partial n} = -\sigma_{sw}.$$

Na granicy między ośrodkami sam potencjał jest oczywiście ciągły

$$V_{nad} = V_{pod},$$

gdyż

$$V_{nad} - V_{pod} = -\int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l} \longrightarrow 0,$$

gdy $d\mathbf{l} \longrightarrow 0$.

2.10.7 Energia w układach z dielektrykami

Naładowanie kondensatora wymaga pracy

$$W = \frac{1}{2} C V^2.$$

W przypadku kondensatora wypełnionego dielektrykiem, ładunki związane kompensują pole \mathbf{E} . Musimy wprowadzić większy ładunek, aby uzyskać tę samą różnicę potencjałów. Praca i pojemność zwiększa się o czynnik ε_r .

$$C = \varepsilon_r C_{próżni}.$$

Dla kondensatora wypełnionego dielektrykiem zamiast

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 d^3r \quad (2.18)$$

będziemy mieć

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \varepsilon_r E^2 d^3r,$$

co można zapisać, jako

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3r. \quad (2.19)$$

Aby wyprowadzić ten wzór zakłada się, że dielektryk spoczywa, a do układu wprowadzane są w małych porcjach ładunki swobodne

$$\delta W = \int (\delta \rho_{sw}) V d^3r.$$

Energia całkowita składa się z trzech członów

$$W = W_{sw} + W_{zw} + W_{sp}.$$

Pole \mathbf{D} we wzorze (2.19) uwzględnia tylko W_{sw} , co jest uzasadnione, gdyż $W_{zw} + W_{sp} = 0$. Wzór (2.18) uwzględnia $W_{sw} + W_{zw}$ bez udziału W_{sp} , o czym należy pamiętać.

3

MAGNETOSTATYKA

3.1 Siły magnetyczne

3.1.1 Pole magnetyczne

Źródłem pola magnetycznego są poruszające się ładunki elektryczne. W licznych przytaczonych doświadczeniach ilość ładunków dodatnich i ujemnych w każdym odcinku przewodnika jest taka sama. Wobec tego siłą odpowiedzialną za oddziaływanie przewodników nie jest siła elektrostatyczna.

Spoczywający ładunek wytwarza pole elektrostatyczne o natężeniu \mathbf{E} . Ładunek, który się porusza wytwarza *pole magnetyczne o indukcji* \mathbf{B} . Do wykrycia tego pola wystarczy zwykła igła magnetyczna.

3.1.2 Siła Lorentza

Łatwo można zauważyć, że kierunki i zwroty wektorów siły, prędkości i indukcji magnetycznej wiążą się poprzez iloczyn wektorowy. Siła magnetyczna działająca na poruszający się ładunek elektryczny jest faktem doświadczalnym. Nosi ona nazwę siły Lorentza i wynosi

$$\mathbf{F}_m = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

W obecności pola \mathbf{E} i \mathbf{B} ma ona postać

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Jednostką pola magnetycznego o indukcji \mathbf{B} jest *tesla* $1\text{T}=1\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$. Siły magnetyczne są szczególnym rodzajem sił i mogą prowadzić do bardzo dziwnych torów cząstek naładowa-

nych. Siły magnetyczne nie wykonują pracy, ponieważ

$$dW_m = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l}.$$

po podstawieniu wyrażenia na siłę otrzymamy

$$dW_m = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \cdot dt = 0$$

3.1.3 Prąd

Natężeniem prądu płynącego przez przewodnik nazywamy ładunek, przepływający w jednostkowym czasie przez jego przekrój poprzeczny. Jeśli zmienimy znak ładunku Q i jego prędkości \mathbf{v} , to siła \mathbf{F}_m nie ulegnie zmianie. Ładunki ujemne poruszają się w kierunku przeciwnym niż ładunki dodatnie. Zamiast mówić o poruszających się w przewodniku elektronach (posiadających ładunek ujemny) wygodniej jest przyjąć, że poruszają się ładunki dodatnie w kierunku przeciwnym. Jednostką natężenia prądu jest amper

$$1A = 1 \frac{C}{s}.$$

Ładunek liniowy o gęstości λ daje prąd o natężeniu

$$I = \lambda v,$$

ponieważ odcinek o długości $v\Delta t$ niesie ładunek $\lambda v\Delta t$, który przepływa przez dany punkt w czasie Δt . Do dalszych zastosowań wygodniej jest wprowadzić zapis wektorowy

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}.$$

Przewodnik obojętny elektrycznie zawiera tyle samo ładunków dodatnich, co ujemnych. Tylko jedne ładunki (ujemne) poruszają się i dają wkład do prądu \mathbf{I} .

Siła działająca na odcinek przewodnika z prądem wynosi

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl \\ &= \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl. \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathbf{I} \parallel d\mathbf{l}$, więc przy stałym prądzie

$$\mathbf{F}_m = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

W przypadku ładunków płynących po powierzchni wprowadza się powierzchniową gęstość prądu

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}},$$

która jest natężeniem prądu na jednostkę długości prostopadłej do kierunku przepływu. Jeśli gęstość powierzchniowa ładunku ruchomego jest równa σ a jego prędkość wynosi \mathbf{v} , to

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}.$$

Siła magnetyczna, działająca na prąd powierzchniowy jest równa

$$\mathbf{F}_m = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma ds = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) ds.$$

W przypadku przepływu prądu objętościowego definiuje się objętościową gęstość prądu

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{ds_{\perp}}.$$

Jest to natężenie prądu przypadające na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu. $\rho ds_{\perp} \mathbf{v}$ jest ładunkiem przepływającym w jednostce czasu przez przekój ds_{\perp} przewodnika. Analogiczny wzór ma postać

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

gdzie ρ jest objętościową gęstością ruchomego ładunku, przemieszczającego się z prędkością \mathbf{v} . Siła magnetyczna działająca na prąd objętościowy jest równa

$$\mathbf{F}_m = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d^3r = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3r.$$

Zgodnie z definicją prądu $\mathbf{J} = d\mathbf{I}/ds_{\perp}$ natężenie prądu przepływającego przez powierzchnię S ograniczającą objętość V wynosi

$$\oint_S J ds_{\perp} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}.$$

Zgodnie z twierdzeniem o dywergencji

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3r.$$

Całkowity ładunek jest zachowany. To co wypływa pomniejsza ładunek w objętości V

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3r &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r \\ \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d^3r &= -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r. \end{aligned}$$

Równość ta, prawdziwa dla dowolnej objętości, oznacza, że musi być spełnione równanie

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Jest to lokalna zasada zachowania ładunku znana pod nazwą *równania ciągłości*.

W wyrażeniu na siłę magnetyczną mamy cztery typy prądów, które występują pod znakiem całki lub sumy w następujących kombinacjach

Prądy	Wyrażenia
punktowe	$\sum_i q_i \mathbf{v}_i$
liniowe	$\int \mathbf{I} dl$
powierzchniowe	$\int \mathbf{K} dS$
objętościowe	$\int \mathbf{J} d^3r,$

które są konsekwencją różnych rozkładów ładunku poczynając od punkтового q , poprzez liniowy λdl , powierzchniowy σds , a na objętościowym ρd^3r kończąc.

3.2 Prawo Biota - Savarta

Dział związany z prądami stałymi nazywa się *magnetostatyką*. Prądy stałe wytwarzają pola magnetyczne stałe w czasie. Podobnie nieruchome ładunki wytwarzają pola elektryczne niezmiennie w czasie. Dokładniej chodzi o gęstość ładunku ρ , która powinna być stała w czasie. Kiedy przez przewodnik płynie prąd stały, jego natężenie musi być jednakowe wzdłuż całego przewodnika. Jeśli zacząłby się gdzieś zbierać nie byłby stały, a ρ zmieniłoby się w czasie. Tak więc w magnetostatyce $\partial\rho/\partial t = 0$ i równanie ciągłości przybiera postać

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Pojedynczy ładunek punktowy nie może być traktowany jako prąd stały. Nie wytwarza stałego pola magnetycznego.

3.2.1 Pole magnetyczne liniowego prądu stałego

Pole magnetyczne wytworzone przez liniowy prąd stały jest określone przez prawo Biota-Savarta

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} dl',$$

które, wiedząc że $\mathbf{I} \parallel d\mathbf{l}$ oraz $\mathbf{I} = \text{const}$ możemy zapisać jako

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}. \quad (3.1)$$

Całkowanie odbywa się wzdłuż drogi przepływu prądu, a $d\mathbf{l}$ jest elementem długości przewodnika przez który płynie prąd I . Uniwersalną stałą μ_0 nazywa się *przenikalnością magnetyczną próżni*

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}.$$

Wektor $\widehat{\mathcal{R}}$ jest skierowany od elementu $d\mathbf{l}$ do punktu \mathbf{r} . Jednostki są tak dobrane, aby indukcja magnetyczna była mierzona w niutonach na amper razy metr, czyli w teslach (T) $1\text{T}=1\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$, zgodnie ze wzorem na siłę Lorentza.

Prawo Biota-Savarta można uważać za odpowiednik prawa Coulmba dla magnetostatyki. Podobieństwo widać w obecności wyrazu $\widehat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}^2$. Łatwo napisać prawo Biota - Savarta, odpowiednio, dla prądów powierzchniowych

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \widehat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} ds'$$

oraz objętościowych

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \widehat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} d^3r'.$$

Przykład

Obliczmy indukcję pola magnetycznego w odległości z od przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd I . Łatwo zauważyć, że $d\mathbf{l}' \times \widehat{\mathcal{R}}$ wychodzi (\odot) z płaszczyzny $(d\mathbf{l}', \widehat{\mathcal{R}})$ i ma długość

$$dl' \sin \alpha = dl' \sin(\pi/2 + \theta) = dl' \cos \theta.$$

Następnie zauważamy, że

$$l' = z \operatorname{tg} \theta,$$

stąd

$$dl' = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta,$$

a

$$z = \mathcal{R} \cos \theta$$

i

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{z^2}.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{z^2} \right) \frac{z}{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1). \end{aligned}$$

Dla nieskończonego przewodnika

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}.$$

Można teraz znaleźć siłę oddziaływania dwóch nieskończenie długich przewodników z prądem. Skorzystamy ze wzoru

$$\mathbf{F} = I_2 \int (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}),$$

gdzie

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

jest indukcją magnetyczną w odległości d od przewodnika z prądem I_1 . Po podstawieniu znajdujemy wartość siły jaką wywiera nieskończony prostoliniowy przewodnik, przez który płynie prąd I_1 , na taki sam przewodnik z prądem I_2 umieszczony w odległości d

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int \mathrm{d}l.$$

Całkowita siła jest nieskończona, natomiast siła przypadająca na jednostkę długości jest równa

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

Na tym wzorze opiera się definicja jednostki natężenia prądu 1 A.

3.3 Dywergencja i rotacja pola magnetycznego

3.3.1 Rotacja \mathbf{B} dla prądu prostoliniowego

Łatwo policzyć całkę

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \oint \mathrm{d}l = \mu_0 I$$

dla prądu prostoliniowego I .

Wynik nie zależy od d . Kontur całkowania nie musi być okręgiem. Dla każdego konturu otaczającego przewodnik otrzymuje się ten sam wynik. Można się domyślać, że

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_c,$$

gdzie I_c jest całkowitym natężeniem prądu w obszarze otoczonym konturem całkowania. Jeśli przepływ ładunku opisuje objętościowa gęstość prądu, to

$$I_c = \int \mathbf{J} \mathrm{d}s.$$

Korzystając z twierdzenia Stokesa o rotacji dochodzimy do równania

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

W ogólnym przypadku dowolnego prądu objętościowego otrzymane równanie nosi nazwę *prawa Ampère'a*.

3.3.2 Dywergencja i rotacja \mathbf{B} w przypadku ogólnym

Wykorzystamy prawo Biota - Savarta w przypadku dowolnego prądu objętościowego $\mathbf{J}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} d^3 r'. \quad (3.2)$$

Jak pamiętamy $\mathbf{R} = (x - x') \mathbf{e}_x + (y - y') \mathbf{e}_y + (z - z') \mathbf{e}_z$.¹ Całkownie przeprowadza się po współrzędnych x', y', z' . Obliczmy dywergencję pola $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ względem współrzędnych x, y, z

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) d^3 r'.$$

Wykorzystujemy relację

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

do wyrażenia pod całką

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \left[\nabla_{(\mathbf{r})} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right).$$

Oba wyrazy po prawej stronie znikają, pierwszy z powodu różniczkowania $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ po zmiennych x, y i z , drugi ze względu na możliwość zapisania $\nabla \times \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right)$ jako

$$\nabla \times \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = -\nabla \times \left(\nabla \frac{1}{\mathcal{R}} \right),$$

gdyż $\nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = 0$ dla dowolnej funkcji f . Tak więc pokazaliśmy, że

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Działając operatorem rotacji na równanie (3.2) otrzymamy

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) d^3 r'. \quad (3.3a)$$

¹Oznaczenie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ jest używane zamiennie z $\vec{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \hat{\mathcal{R}}$, gdzie $\hat{\mathcal{R}}$ jest wektorem jednostkowym.

Przyda się teraz wzór

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.4)$$

w przypadku, gdy \mathbf{A} zastąpimy operatorem ∇

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \nabla \times (\underline{\mathbf{B}} \times \mathbf{C}) + \nabla \times (\mathbf{B} \times \underline{\mathbf{C}}), \quad (3.5)$$

gdzie podkreślenie dotyczy działania operatorem ∇ , kolejno, na wektory \mathbf{B} i \mathbf{C} . Zastosowanie reguły (3.4) do obu wyrazów prawej strony (3.5) daje

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \nabla) \underline{\mathbf{B}} - \mathbf{C} (\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}}) + \mathbf{B} (\nabla \cdot \underline{\mathbf{C}}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \underline{\mathbf{C}}. \quad (3.6)$$

Po podstawieniu $\mathbf{B} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$ i $\mathbf{C} = \hat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}^2$ w (3.6) dostajemy

$$\nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) = \mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}, \quad (3.7)$$

gdź dwa pierwsze wyrazy są równe zero (\mathbf{J} zależy od \mathbf{r}' podczas, gdy dywergencja dotyczy \mathbf{r}). Dywergencję z $\hat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}^2$ można liczyć na różne sposoby. Zauważmy, że

$$\nabla \cdot \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = -\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -\Delta \frac{1}{\mathcal{R}}. \quad (3.8)$$

Znamy potencjał wytworzony przez ładunek punktowy q , który spełnia równanie Poissona

$$\Delta \frac{q}{4\pi\epsilon_0\mathcal{R}} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{\mathcal{R}})$$

skąd widać, że

$$\Delta \frac{1}{\mathcal{R}} = -4\pi\delta(\vec{\mathcal{R}}).$$

Dostajemy zatem, zgodnie z (3.8)

$$\nabla \cdot \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = 4\pi\delta(\vec{\mathcal{R}}),$$

gdzie $\vec{\mathcal{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Drugi wyraz we wzorze (3.7) można pominąć. Po przeliczeniu przez części widać, że jest on równy zero. Końcowy wynik dla rotacji \mathbf{B} ma postać

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Wykorzystano w nim podstawową własność delty Diraca $\delta(\vec{\mathcal{R}})$. Otrzymane równanie nosi nazwę *prawa Ampère'a*.²

²Wobec własności $\text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = 0$ spełnionej dla każdego wektora \mathbf{B} widać, że $\text{div } \mathbf{J} = 0$.

Aby uzyskany wynik był kompletny sprawdzimy udział ostatniego wyrazu po prawej stronie we wzorze (3.7). Ponieważ $\vec{\mathcal{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, a pochodna działa jedynie na $\widehat{\mathcal{R}}/\mathcal{R}^2$, możemy zastąpić ∇ przez $\nabla' = (\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z')$ z uwzględnieniem zmiany znaku

$$-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\widehat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\widehat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}. \quad (3.10)$$

Dalsze przekształcenia wykonamy dla jednej ze składowych równania (3.10), na przykład składowej x . Obliczmy najpierw dywergencję iloczynu $\mathcal{R}_x/\mathcal{R}^3$ i \mathbf{J}

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\mathcal{R}_x}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right) = \frac{\mathcal{R}_x}{\mathcal{R}^3} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{J} \cdot \left(\nabla' \frac{\mathcal{R}_x}{\mathcal{R}^3} \right).$$

Dla prądów stałych $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, jak ustaliliśmy przy omawianiu równania ciągłości ładunku. Składową x -ową równania (3.10) można zatem zapisać w postaci

$$\left[-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\widehat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathcal{R}_x}{\mathcal{R}^3} \cdot \mathbf{J} \right).$$

Wkład do całki (3.3a) jest następujący

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathcal{R}_x}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \right) d^3 r' = \oint_S \frac{\mathcal{R}_x}{\mathcal{R}^3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}'.$$

Objętość \mathcal{V} można uczynić wystarczająco dużą, a wtedy wszystkie prądy będą płynąć wewnątrz obszaru \mathcal{V} , co powoduje znikanie \mathbf{J} na brzegu, a więc całka powierzchniowa jest równa zeru.

3.3.3 Zastosowanie prawa Ampère'a

Jeżeli prawo Ampère'a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

przełączymy obustronnie po powierzchni S rozpiętej na danym konturze C , to dostaniemy

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.11)$$

Zgodnie z twierdzeniem Stokesa dla rotacji

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

możemy zastąpić całkę powierzchniową z lewej strony (3.11) przez całkę konturową, co daje

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c \quad (3.12)$$

równoważną (3.9), gdzie I_c jest całkowitym natężeniem prądu płynącego przez powierzchnię S o brzegu C . Inaczej I_c jest całkowitym prądem objętym konturem C . Równanie (3.12) jest całkową postacią prawa Ampère'a (3.9). Kierunek dodatni obiegu po konturze i dodatnie natężenie prądu określa reguła śruby prawoskrętnej (lub kciuka i palców prawej dłoni).

Widoczne są następujące analogie:

Elektrostatyka	prawo Coulomba	prawo Gaussa
Magnetostatyka	prawo Biota-Savarta	prawo Ampère'a

Przykłady

1. Łatwo policzyć indukcję magnetyczną wokół odcinka długiego przewodnika z prądem
Ponieważ

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B2\pi d$$

porównując z prawem Ampère'a

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

otrzymujemy

$$B2\pi d = \mu_0 I$$

stąd

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

2. Prąd powierzchniowy

$$\mathbf{K} = K \mathbf{e}_x$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_c$$

$$2Bl = \mu_0 Kl$$

$$B = \frac{\mu_0 K}{2} = \begin{cases} -\mu_0 K \mathbf{e}_y / 2 & \text{dla } z > 0 \\ +\mu_0 K \mathbf{e}_y / 2 & \text{dla } z < 0 \end{cases}$$

$$B_z = 0$$

3. Gęsto nawinięta cewka

Na zewnątrz cewki nie ma prądów, zatem rotacja znika i

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B(a) - B(b)] L = 0$$

skąd dostajemy

$$B(a) = B(b).$$

Zatem \mathbf{B} nie zależy od miejsca na zewnątrz cewki. Ponieważ daleko od cewki powinno być $B = 0$, stąd wynika $B(a) = B(b) = 0$. Dla konturu Ampère'a obejmującego część uzwojenia cewki o długości L

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 I_c = \mu_0 n I L$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{e}_z & \text{wewnątrz solenoidu} \\ 0 & \text{na zewnątrz solenoidu} \end{cases}$$

4. Cewka toroidalna

Należy wykazać w oparciu o prawo Biota-Savarta, że \mathbf{B} nie ma składowej radialnej i składowej wzdłuż osi z . Wektor prądu ma postać

$$\mathbf{I} = I_r \hat{\mathbf{r}} + I_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Należy obliczyć $\mathbf{I} \times \vec{\mathcal{R}}$. Dalsze postępowanie jest już proste. Dla konturu współśrodkowego z torusem i leżącego wewnątrz niego

$$B 2\pi r = \mu_0 N I.$$

Ostatecznie

$$\mathbf{B} = \begin{cases} [\mu_0 N I / (2\pi r)] \mathbf{e}_\varphi & \text{wewnątrz torusa} \\ 0 & \text{na zewnątrz torusa} \end{cases}$$

przy czym N jest całkowitą liczbą zwojów torusa.

3.3.4 *Porównanie magnetostatyki i elektrostatyki***Elektrostatyka:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ gdzie } \rho \text{ objętościowa gęstość ładunku}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \text{ daleko od } \rho \text{ pole } \mathbf{E} = 0$$

Jest to prawo Gaussa równoważne prawu Coulomba i zasadzie superpozycji.

Magnetostatyka:

Podstawowym prawem jest prawo Ampère'a, które jest równoważne prawu Biot-Savarta uzupełnionemu zasadą superpozycji:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \text{ gdzie } \mathbf{J} \text{ jest objętościową gęstością prądu}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \text{ daleko od } \mathbf{J} \text{ pole } \mathbf{B} = 0.$$

Oba te prawa są równaniami Maxwella dla elektrostatyki i magnetostatyki. Jeżeli uzupełnimy je wzorem Lorentza:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

określającym siłę wywieraną przez pola \mathbf{E} i \mathbf{B} na ładunek elektryczny q , to otrzymamy pełne sformułowanie elektrostatyki i magnetostatyki.

Brak ładunków magnetycznych (monopoli magnetycznych) wynika z powyższego sformułowania i na tym poprzestaniemy. Ładunek w spoczynku wytwarza pole \mathbf{E} . Do wytworzenia pola \mathbf{B} potrzebny jest poruszający się ładunek.

Siły magnetyczne są o kilka rzędów wielkości słabsze od sił elektrycznych. Dzięki zbiegowi okoliczności można je zauważyć przy małych prędkościach poruszania się ładunków. Siła \mathbf{F} jest proporcjonalna do iloczynu $q\mathbf{v}$. Jeżeli przepływa duży ładunek, to iloczyn $q\mathbf{v}$ jest duży nawet przy małych prędkościach \mathbf{v} . Równocześnie duży ładunek elektronów jest kompensowany przez ładunki dodatnie jąder atomowych i siły elektrostatyczne nie przysłaniają słabych sił magnetycznych. Prędkość elektronów w metalu między kolejnymi zderzeniami w temperaturze pokojowej dochodzi do 10^6 m/s. Średnia prędkość "unoszenia" elektronów przez pole \mathbf{E} wynosi zaledwie ułamki mm/s.

3.3.5 *Magnetyczny potencjał wektorowy*

W elektrostatyce własność $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ pozwoliła wprowadzić potencjał skalarny V zgodnie z relacją

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

W magnetostatyce $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pozwala wprowadzić w oparciu o relację

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

spełnioną dla dowolnego wektora \mathbf{A} , potencjał wektorowy, który wyraża indukcję magnetyczną w postaci

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Wprowadźmy potencjał wektorowy \mathbf{A} do prawa Ampere'a:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \text{grad} (\text{div} \mathbf{A}) - \text{laplasjan} \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Do wyeliminowania dywergencji \mathbf{A} wykorzystamy swobodę w doborze $\mathbf{A} \implies \mathbf{A} + \nabla \lambda$, gdzie λ jest dowolną funkcją. Ponieważ $\text{rot}(\text{grad} \lambda) = \nabla \times (\nabla \lambda) = (\nabla \times \nabla) \lambda \equiv 0$, więc dodanie $\nabla \lambda$ nie zmieni $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Zakładamy, że pierwotny potencjał \mathbf{A}_0 posiada nie znikającą dywergencję. Przez dodanie $\nabla \lambda$ uzyskujemy nowy potencjał

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \lambda,$$

dla którego chcemy, aby

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Będzie to możliwe, jeśli

$$\Delta \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0.$$

Widzimy, że funkcja λ musi spełniać równanie Poissona, analogiczne do równania z elektrostatyki

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

z $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ zamiast ρ/ε_0 . Znamy rozwiązanie równania Poissona z elektrostatyki w formie całki

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho}{\mathcal{R}} d^3r'$$

i możemy je zastosować do obecnego przypadku. Jeśli $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ dąży do zera w dużych odległościach, to

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{\mathcal{R}} d^3r'.$$

Jeśli $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ nie znika w nieskończoności, trzeba wybrać inną metodę wyznaczania λ . Tak czy inaczej, zawsze można wybrać \mathbf{A} w taki sposób, że $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ nie naruszając przy tym relacji $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, która dotyczy rotacji i pozostawia dowolność wyboru dywergencji. Przy takim wyborze potencjału wektorowego \mathbf{A} prawo Ampere'a przybiera postać

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Jest to ponownie równanie Poissona – dokładnie trzy równania, po jednym dla każdej współrzędnej kartezjańskiej,

$$\Delta A_i = -\mu_0 J_i,$$

gdzie $i = 1, 2, 3$. Przyjmując, że \mathbf{J} jest zawarte w ograniczonej objętości (znika dla dużych \mathbf{r}) możemy zapisać rozwiązanie tego równania w postaci:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d^3 r'.$$

Korzyści z potencjału $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nie są tak duże jak z potencjału skalarnego V . Dla prądów liniowych i powierzchniowych mamy odpowiednio

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}'}{\mathcal{R}}$$

oraz

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{\mathcal{R}} ds'.$$

Kierunek \mathbf{A} związany jest zazwyczaj z kierunkiem gęstości prądu. W ogólności nie można nic bliższego na ten temat powiedzieć.

3.3.6 Podsumowanie i warunki brzegowe

prawo Biot-Savarta		prawo Ampère'a
$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{R}}}{\mathcal{R}^2} d^3 r'$	$\Leftarrow \mathbf{J} \Rightarrow$	$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ $0 = \nabla \cdot \mathbf{B}$
\mathbf{J}	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	\mathbf{J}
$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} d^3 r'$	$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}$ $\Leftarrow \mathbf{J} \Rightarrow$	$-\mu_0 \mathbf{J} = \Delta \mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$(B_{nad}^\perp - B_{pod}^\perp) S = 0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{nad}^{\parallel} - B_{pod}^{\parallel}) l$$

$$\mu_0 I_c = \mu_0 K l$$

$$B_{nad}^{\parallel} - B_{pod}^{\parallel} = \mu_0 K$$

$$\mathbf{B}_{nad} - \mathbf{B}_{pod} = \mu_0 \mathbf{K} \times \mathbf{n}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_{nad}^{\perp} = \mathbf{A}_{pod}^{\perp} \quad \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \phi_{\mathbf{B}} = 0$$

$$\mathbf{A}_{nad}^{\parallel} = \mathbf{A}_{pod}^{\parallel}$$

$$\mathbf{A}_{nad} = \mathbf{A}_{pod}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{nad}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{pod}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

3.3.7 Multipolowe rozwinięcie potencjału wektorowego

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta')$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{\mathcal{R}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint r'^n P_n(\cos \theta') d\mathbf{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\mathbf{l} + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^3} \oint r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\mathbf{l}' + \right]$$

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' d\mathbf{l}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}'$$

Korzystając z

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{s}'$$

otrzymujemy³

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

przy czym

$$\mathbf{m} = I \int d\mathbf{s}',$$

jest *magnetycznym momentem dipolowym*, a $\int d\mathbf{s}'$ jest “wektorowym” polem powierzchni pętli.

3.4 Pole magnetyczne w ośrodku

3.4.1 Namagnesowanie

Wszystkie zjawiska magnetyczne są spowodowane ruchem ładunków elektrycznych. W skali mikroskopowej w ośrodku spotykamy elektrony krążące wokół jąder oraz posiadające własny moment pędu (spin) i moment magnetyczny. Odpowiednie obwody prądowe są tak małe, że można je traktować jako idealne dipole magnetyczne. Z powodu przypadkowego ułożenia osi momentów poszczególnych atomów ośrodka wypadkowy moment magnetyczny znosi się. Natomiast w zewnętrznym polu magnetycznym dipole ustawiają się wzdłuż linii sił pola, a ośrodek staje się spolaryzowany magnetycznie czyli namagnesowany.

Dielektryki polaryzują się zgodnie z zewnętrznym polem elektrycznym. Materiały paramagnetyczne magnesują się zgodnie z polem indukcji \mathbf{B} . Istnieją też substancje diamagnetyczne w których namagnesowanie ma ten sam kierunek, a zwrot przeciwny w stosunku do pola \mathbf{B} . Istnieją jeszcze specyficzne materiały, które w odróżnieniu od paramagnetyków, zachowują namagnesowanie nawet po zniknięciu pola zewnętrznego \mathbf{B} . Nazywa się je ferromagnetykami. Najbardziej znanym przykładem są magnesy trwałe wykonane z żelaza lub substancji ceramicznych typu ferrytów.

Wielkość

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

³Korzystamy z twierdzenia Stokesa o rotacji $\int \nabla \times \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l}$. Podstawiamy $\mathbf{A} = \mathbf{c}f$, gdzie \mathbf{c} jest wektorem stałym. Ponieważ $\nabla \times \mathbf{c}f = \nabla f \times \mathbf{c}$, tym samym $\int \nabla f \times \mathbf{c} \, d\mathbf{s} = \mathbf{c} \cdot \oint f \, d\mathbf{l}$ skąd $\int \nabla f \times d\mathbf{s} = -\oint f \, d\mathbf{l}$. Jeszcze raz podstawiamy $f = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$. Wtedy $\nabla f = \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) = (\nabla \odot \mathbf{r}) \circ \mathbf{c} = \mathbf{I} \circ \mathbf{c} = \mathbf{c}$. Ostatecznie mamy relację $\mathbf{c} \times \int d\mathbf{s} = -\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{l}$ spełnioną dla dowolnego stałego wektora \mathbf{c} .

nazywa się gęstością momentu magnetycznego albo namagnesowaniem a jej całkę objętościową

$$\mathbf{m} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{M}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

momentem magnetycznym

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Wkład do potencjału wektorowego jest potencjałem dipola magnetycznego

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.13)$$

Indukcję magnetyczną \mathbf{B} poza obszarem lokalizacji źródeł można otrzymać przez bezpośrednie obliczenie rotacji potencjału $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}}{r^3}.$$

3.4.2 Pole ciała namagnesowanego

Nie będziemy się teraz martwić w jaki sposób pojawiło się namagnesowanie (polaryzacja magnetyczna, magnetyzacja). W magnetostatyce odgrywa ona taką samą rolę jak polaryzacja elektryczna \mathbf{P} w elektrostatyce. Rozważymy materiał namagnesowany objętościowo o znanym momencie dipolowym przypadającym na jednostkę objętości \mathbf{M} . Potencjał pojedynczego dipola \mathbf{m} zlokalizowanego w punkcie \mathbf{r}' już znamy. Rozszerzając wzór (3.13) mamy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}.$$

Potencjał od ciała namagnesowanego można zapisać jako całkę objętościową

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} d^3 r',$$

którą można zapisać w nieco inny sposób, jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{\mathcal{R}} \right] d^3 r'$$

Skorzystamy z relacji

$$\nabla' \times \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{1}{\mathcal{R}} \right] = \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') - \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right),$$

która we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ M_x \frac{1}{\mathcal{R}} & M_y \frac{1}{\mathcal{R}} & M_z \frac{1}{\mathcal{R}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\mathcal{R}} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{\mathcal{R}} & \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{\mathcal{R}} & \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\mathcal{R}} \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

aby napisać

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{\mathcal{R}} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d^3r' - \int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d^3r' \right\}.$$

Drugą całkę można przekształcić w całkę powierzchniową. W tym celu z twierdzenia Gaussa dla wektora będącego iloczynem wektorowym $\mathbf{v} \times \mathbf{c}$, gdzie \mathbf{c} jest wektorem stałym otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) d^3r &= \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{s}, \\ \mathbf{c} \cdot \int \nabla \times \mathbf{v} d^3r &= -\mathbf{c} \cdot \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\int \nabla \times \mathbf{v} d^3r = - \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{s}.$$

Ostatni wzór pozwala zapisać potencjał $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ w następującej postaci

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{1}{\mathcal{R}} [\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] d^3r' + \oint \frac{1}{\mathcal{R}} [\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{s}'] \right\}. \quad (3.14)$$

Pierwszy wyraz ma postać potencjału prądu objętościowego, który oznaczmy jako

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Ponieważ $d\mathbf{s}' = \mathbf{n} ds'$, gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnym do powierzchni, drugi wyraz ma postać potencjału pochodzącego od prądu powierzchniowego

$$\mathbf{K}_{zw} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}.$$

Korzystając z powyższych oznaczeń zapiszemy potencjał (3.14) jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_{zw}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_{zw}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} ds'.$$

Oznacza to, że potencjał (tym samym indukcja magnetyczna \mathbf{B}) ciała namagnesowanego pochodzi od efektywnego prądu objętościowego o gęstości $\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M}$ płynącego wewnątrz materiału magnetycznego i od prądu powierzchniowego o gęstości powierzchniowej $\mathbf{K}_{zw} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$. Zamiast sumować wpływ poszczególnych dipoli określamy najpierw prądy związane, a następnie szukamy wytworzonych przez nie pól. Istnieje uderzające podobieństwo do pola ciała spolaryzowanego elektrycznie ($\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, $\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$). Fizyczna interpretacja prądów związanych jest dość prosta.

3.4.3 Natężenie pola magnetycznego \mathbf{H}

Jesteśmy obecnie gotowi by połączyć pola pochodzące od prądów związanych oraz wszystkie inne pola, które będziemy nazywać polami od prądów swobodnych. Całkowita gęstość prądu może być zapisana jako

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_{sw}.$$

Uwzględniając ostatnie wyniki i prawo Amèrè'a dostajemy

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M}.$$

Po zebraniu rotacji mamy

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{sw}.$$

Wyrażenie w nawiasie nazywamy natężeniem pola magnetycznego

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}.$$

Prawo Ampère'a zapisane za pomocą natężenia pola \mathbf{H} ma postać

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sw}. \quad (3.15)$$

W postaci całkowej

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{sw},$$

przy czym I_{sw} jest całkowitym natężeniem prądu płynącego przez kontur Ampère'a. Wektor \mathbf{H} odgrywa rolę analogiczną do \mathbf{D} w elektrostatyce. Równanie (3.15) wygląda tak samo jak wprowadzone na początku prawo Ampère'a. Jedynie całkowite natężenie prądu zastąpiono natężeniem prądu swobodnego, a \mathbf{B} przez $\mu_0 \mathbf{H}$. Nie należy doszukiwać się zbyt wielkiego znaczenia w tym podobieństwie. Z równania $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ wynika

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

Tylko gdy znika dywergencja \mathbf{H} analogia między \mathbf{B} i $\mu_0 \mathbf{H}$ jest ścisła.

3.4.4 Warunki brzegowe

Dla powierzchni po której płynie prąd powierzchniowy składowe prostopadłe do powierzchni spełniają równanie

$$H_{nad}^{\perp} - H_{pod}^{\perp} = - (M_{nad}^{\perp} - M_{pod}^{\perp}).$$

Z równania $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sw}$ wynika

$$\mathbf{H}_{nad} - \mathbf{H}_{pod} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n}.$$

Czasami wygodniej jest posługiwać się równaniami

$$\begin{aligned} B_{nad}^{\perp} - B_{pod}^{\perp} &= 0, \\ \mathbf{B}_{nad} - \mathbf{B}_{pod} &= \mu_0 (\mathbf{K} \times \mathbf{n}). \end{aligned}$$

3.4.5 Podatno i przenikalno magnetyczna

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{3.16}$$

Stała proporcjonalności nosi nazwę *podatności magnetycznej*. Jest to wielkość bezwymiarowa. Diamagnetyki (wodór, miedź, srebro, złoto, bizmut) mają ujemną podatność rzędu 10^{-9} do 10^{-4} , paramagnetyki (tlen, wolfram, platyna, gadolin) – podatność dodatnią od 10^{-6} do 10^{-1} . Ośrodki spełniające relację (3.16) nazywają się ośrodkami liniowymi magnetycznie.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Współczynnik

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

nosi nazwę *przenikalności magnetycznej*.

4

ELEKTRODYNAMIKA

Dotychczas zajmowaliśmy się stałymi polami elektrycznymi i magnetycznymi. Zjawiska elektryczne i magnetyczne traktowaliśmy jako niezależne. Ten niezależny charakter zjawisk elektrycznych i magnetycznych znika, kiedy zaczynamy uwzględniać zmiany pól w czasie. Zmiennemu w czasie polu magnetycznemu towarzyszy zawsze pole elektryczne i na odwrót. Zamiast o polu elektrycznym i magnetycznym należy mówić o *polu elektromagnetycznym*. Pełne zrozumienie elektromagnetyzmu jest możliwe na gruncie szczególnej teorii względności. Obecnie ograniczymy się do podstawowych zjawisk i do dojścia na ich podstawie do układu równań znanych pod nazwą *równań Maxwella*. Rządzą one zachowaniem się pól elektromagnetycznych.

4.1 Prawo Ohma

Aby mógł płynąć prąd na ładunki elektryczne musi działać siła. Dla większości materiałów gęstość prądu \mathbf{J} jest proporcjonalna do siły \mathbf{f} działającej na jednostkowy ładunek

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}.$$

Współczynnik σ jest stałą materiałową noszącą nazwę *elektrycznej przewodności właściwej*. Jego odrotność

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

nazywa się *elektrycznym oporem właściwym* o wymiarze Ω m. Jego wartość dla przewodników waha się w granicach 10^{-8} do $10^{-5} \Omega$ m. Dla półprzewodników ρ przyjmuje wartości od 10^{-2} do $10^3 \Omega$ m. Izolatory charakteryzują się oporem właściwym od 10^5 do $10^{10} \Omega$ m.

Siła powodująca ruch może mieć naturę chemiczną (różnica potencjałów chemicznych), cieplną (gradient temperatury) czy też, jak oczekujemy, elektromagnetyczną

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Zwykle prędkość \mathbf{v} jest na tyle mała, że drugi wyraz w powyższym równaniu można pominąć

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Ostatnie równanie nosi nazwę *różniczkowego prawa Ohma*. Dla doskonałego przewodnika $\mathbf{E} = 0$ nawet wtedy, gdy $\mathbf{J} \neq 0$. Druty w obwodach elektrycznych traktuje się jako ekwipotencjalne. Oporniki są wykonane z materiałów źle przewodzących.

Jakie będzie natężenie prądu w oporniku, jeśli różnica potencjałów na jego końcach jest równa V ? Jeśli pole \mathbf{E} jest jednorodne (co pokażemy niebawem) to \mathbf{J} też jest jednorodne. Tak więc

$$I = JA.$$

Ponieważ $J = \sigma E$, a $E = V/L$, gdzie L jest długością przewodnika, ostatecznie otrzymuje się

$$I = \sigma \frac{V}{L} A.$$

Stąd

$$V = \left(\frac{1}{\sigma} \frac{L}{A} \right) I$$

lub

$$V = RI, \tag{4.1}$$

gdzie

$$R = \rho \frac{L}{A}.$$

Równanie (4.1) wyraża *prawo Ohma* w najbardziej znanej postaci. Stały (ważne, aby był stały!) współczynnik proporcjonalności R nosi nazwę *oporu elektrycznego*. Zależy on od geometrii układu, przez który płynie prąd oraz od oporu właściwego $\rho = 1/\sigma$ materiału.

W przypadku prądu stałego i jednorodnego przewodnika

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

co oznacza, że objętościowa gęstość ładunku wewnątrz przewodnika jest równa zero. Niezrównoważone ładunki znajdują się na powierzchni, jak w przypadku statycznym. Jak widać

równanie Laplace'a jest również spełnione wewnątrz przewodnika ohmowego przez który płynie prąd stały.

Czy pole wewnątrz walca przewodzącego prąd elektryczny jest jednorodne? Niech potencjał lewego końca będzie stały i równy zeru. Potencjał po prawej stronie przyjmujemy za równy V_0 . Prąd nie wypływa bokami $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$. Zgodnie z prawem Ohma, powinno być $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \implies \partial V / \partial n = 0$. Jeśli V lub $\partial V / \partial n$ jest zadane na wszystkich powierzchniach, to potencjał jest określony jednoznacznie w całej objętości. Można odgadnąć potencjał spełniający równanie Laplace'a i powyższe warunki brzegowe

$$V(z) = V_0 \frac{z}{L},$$

gdzie z jest osią symetrii. Natężenie pola elektrycznego przyjmuje postać

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{L} \hat{\mathbf{z}},$$

czyli jest to istotnie pole jednorodne.

Skąd bierze się prawo Ohma? Jeśli λ jest średnią drogą swobodną między zderzeniami, to czas jaki upływa między zderzeniami wynosi

$$\tau = \frac{\lambda}{v_{\text{term}}},$$

gdzie v_{term} jest średnią prędkością termiczną elektronów $\sim 10^6$ m/s. Prędkość unoszenia elektronów przez pole jest równa

$$v_{\text{u}} = \frac{1}{2} (a\tau - 0) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \frac{\lambda}{v_{\text{term}}}.$$

Można w ten sam sposób oszacować gęstość prądu

$$\mathbf{J} = ne v_{\text{u}} = \frac{ne^2}{2m} \left(\frac{\lambda}{v_{\text{term}}} \right) \mathbf{E}.$$

Przez n oznaczono koncentrację elektronów $n = N/V$, czyli ich liczbę N w jednostce objętości. Dostaliśmy w ten sposób prawo Ohma z następującym wyrażeniem na przewodność właściwą

$$\sigma = \frac{ne^2}{2m} \tau.$$

Dokładniejsze wyrażenie na σ wymaga wykorzystania mechaniki kwantowej do obliczenia τ . Z naszego przybliżonego wzoru wynika poprawna proporcjonalność między przewodnictwem σ a koncentracją nośników n oraz zmniejszanie się przewodnictwa ze wzrostem temperatury.¹

¹W bardzo niskich temperaturach mają miejsce efekty kwantowe, które prowadzą do innych zależności temperatury (np. efekt Kondo).

W wyniku zderzeń pojawia się produkcja entropii, która objawia się w postaci wydzielonego ciepła. Praca nad ładunkiem jednostkowy wynosi V a ładunek przepływający w jednostce czasu jest równy I . Uwolniona moc (praca w jednostce czasu) jest równa

$$P = VI = RI^2.$$

Jest to *prawo Joule'a*.

4.2 Siła elektromotoryczna

W typowym obwodzie elektrycznym natężenie prądu jest praktycznie w danej chwili takie samo w każdym miejscu obwodu. Siła wprawiająca ładunki w ruch działa we wnętrzu baterii. Co wprawia w ruch cały obwód? Dlaczego natężenie w każdej części obwodu jest takie same? Istnieją dwie siły podtrzymujące prąd w obwodzie: siła źródła \mathbf{f}_{zr} (związana z baterią) i siła elektrostatyczna, która wygładza przepływ ładunku i przenosi wpływ źródła na cały obwód (do różnych jego części). Zgromadzenie ładunku w jakiejś części obwodu przeciwdziała **dopływowi** ładunku do tego miejsca i ułatwia jego **odpływ** do dalszych części obwodu likwidując fluktuacje ładunku. Siłę wypadkową zapisujemy jako

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{zr} + \mathbf{E}.$$

Może być wiele przyczyn pojawienia się siły \mathbf{f}_{zr} : chemiczna, ciśnienie mechaniczne, gradient temperatury, światło i inne czynniki. Wielkość

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_{zr} \cdot d\mathbf{l}$$

nazywa się siłą elektromotoryczną (SEM) obwodu. Dla pól elektrostatycznych $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Dla idealnego źródła (SEM), bez oporu wewnętrznego, siła wypadkowa działająca na ładunki jest równa zeru ($\sigma = \infty$, \mathbf{J} skończone przy $\mathbf{f} \rightarrow 0$). Tak więc $\mathbf{E} = -\mathbf{f}_{zr}$. Różnica potencjałów między biegunami baterii a i b jest równa

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}_{zr} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_{zr} \cdot d\mathbf{l}$$

(We wnętrzu baterii $\mathbf{f}_{zr} = 0$). Bateria wytwarza różnicę potencjałów równą sile elektromotorycznej. Bateria 6V wytwarza potencjał dodatniego bieguna o 6V większy od potencjału bieguna ujemnego. Powstaje w ten sposób pole elektryczne, które podtrzymuje przepływ prądu w obwodzie.

4.3 Poruszający się przewodnik w polu magnetycznym

Dla przewodnika poruszającego się w polu magnetycznym

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{mag} \cdot d\mathbf{l}.$$

Ponieważ $\mathbf{f}_{\max} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, zatem

$$\mathcal{E} = vBh$$

Istnieje inny sposób wyznaczenia SEM w poruszającym się obwodzie. Obliczamy strumień magnetyczny prznikający przez obwód

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dla pętli prostokątnej $\Phi_B = Bxh$. Gdy pętla się porusza, to strumień zmienia się z prędkością

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bhv$$

($dx/dt = v$ jest ujemne, bo x oznacza część pętli znajdującej się w polu, która maleje przy jej usuwaniu z pola). Zauważmy, że zmiana strumienia magnetycznego przenikającego przez obwód, wzięta ze znakiem minus, jest równa SEM

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Uzyskany wzór można stosować do dowolnego obwodu o zmieniającym się kształcie w niejednorodnym polu \mathbf{B} .

4.4 Prawo Faradaya

Faraday przeprowadził i opisał serię trzech typów eksperymentów. Zmieniał się w nich strumień Φ_B poprzez (a) ruch obwodu ($\mathbf{v} \neq 0$), (b) ruch cewki wytwarzającej pole \mathbf{B} (przy $\mathbf{v} = 0$) i (c) zmianę pola \mathbf{B} (przy $\mathbf{v} = 0$) poprzez zmianę natężenia prądu w nieruchomej cewce. Wynika stąd wniosek: *Zmiana strumienia pola \mathbf{B} przenikającego przez obwód indukuje pole elektryczne.*

Zgodnie z obserwacjami Faradaya

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

i natężenie pola elektrycznego \mathbf{E} można powiązać ze zmianą indukcji magnetycznej \mathbf{B} równaniem

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}.$$

Jest to całkowita postać *prawa Faradaya*. Posługując się twierdzeniem Stokesa dla rotacji znajdujemy postać różniczkową

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

(Koincydencja trzech typów doświadczeń Faradaya przywiodła Einsteina do *szczególnej teorii względności*.) Śledzenie znaków w prawie Faradaya jest dość skomplikowane, jeśli chcemy wiedzieć, w którym kierunku w obwodzie przepływa prąd indukowany poprzez zmianę \mathbf{B} . Istnieje wygodna reguła nazywana *regułą Lenza*. Można ją streścić w zdaniu:

Natura jest przeciwna zmianie strumienia

Indukowany prąd będzie płynął w takim kierunku, że dodatkowy strumień sprzeciwia się zmianie już istniejącego strumienia. (W znanym doświadczeniu swobodny pierścień umieszczony na elektromagniesie jest zawsze wyrzucany przez pole \mathbf{B} elektromagnesu niezależnie od kierunku przepływu włączanego prądu I .)

4.5 Indukowane pole elektryczne

Odkrycie Faradaya sugeruje istnienie dwóch rodzajów pól elektrycznych: pola związanego z ładunkami elektrycznymi i pola związanego ze zmianami pól magnetycznych. Pierwsze możemy obliczyć w oparciu o prawo Coulomba, drugie posługując się analogią między prawem Faradaya

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

i prawem Ampère'a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Możemy wykorzystać metodę postępowania w odniesieniu do prawa Ampère'a w postaci całkowej

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c$$

zapisując prawo Faradaya w postaci całkowej

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Szybkości zmiany strumienia odpowiada $\mu_0 I_c$.²

²Do wyznaczenia \mathbf{E} potrzebna jest jeszcze znajomość dywergencji. Bez ładunków objętościowych mamy $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

4.6 Indukcyjność

Mamy dwie nieruchome przewodzące pętle. Przez pierwszą płynie prąd o natężeniu I_1 . Znalezienie \mathbf{B}_1 może być trudne, ale jest możliwe

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\mathbf{l}_1 \times \widehat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2}$$

Strumień przez drugą pętlę dany jest wzorem

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2$$

inaczej

$$\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1.$$

Współczynnik M_{21} nazywa się indukcyjnością wzajemną dwóch pętli.

Można dojść do ciekawego wzoru na współczynnik M_{21} , jeśli wykorzystamy twierdzenie Stokesa i potencjał wektorowy

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2,$$

gdzie

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}}.$$

Widzimy zatem, że

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\mathcal{R}}.$$

Jest to *wzór Neumanna*. Wynika z niego, że $M_{21} = M_{12} = M$ jest wielkością czysto geometryczną.

Zmieńmy natężenie prądu I_1 w pierwszej pętli. Strumień przez drugą pętlę ulegnie zmianie i zaindukuje w drugiej pętli SEM

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Milcząco zakładamy, że I_1 zmienia się dostatecznie wolno, aby problem można było rozwiązać *quasi*-statycznie. Skoro prąd I_1 wytwarza Φ_2 w drugiej pętli, domyślamy się, że powinien wytwarzać Φ_1 w pierwszej pętli, czyli

$$\Phi = LI.$$

Stała proporcjonalności L nazywa się *indukcyjnością własną* obwodu. Podobnie jak M zależy ona od wielkości i kształtu obwodu. Indukująca się w obwodzie SEM jest równa

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Indukcyjność mierzy się w *henrach* (H): $1\text{H} = 1\text{V}\cdot\text{s}/\text{A}$.

W obwodzie zawierającym baterię i opór całkowita SEM jest sumą SEM baterii i SEM indukowanej

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = IR. \quad (4.2)$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + k e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Stałą k wyznacza się z warunków początkowych. Jeśli $I(0) = 0$, to

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Do opisu otrzymanej zależności można wprowadzić stałą czasową (czas relaksacji) $\tau = L/R$. Wtedy $I(t) \sim \exp(-t/\tau)$. Uzyskany wynik ma charakter ogólny. W każdym przypadku, gdy szybkość ubytku jakiejś wielkości ($-dI/dt$ w naszym przypadku) jest proporcjonalna do wartości początkowej tej wielkości (I) otrzymuje się uzyskaną zależność. Odwrotność czasu relaksacji $1/\tau$ jest współczynnikiem proporcjonalności między dI/dt i I , co widać z równania (4.2).

4.7 Energia pola magnetycznego

Wytworzenie prądu obwodzie elektrycznym wymaga dostarczenia energii. Nie chodzi tu o energię rozproszoną w obwodzie elektrycznym w postaci ciepła. W tej chwili interesuje nas praca wymagana do pokonania SEM indukcji, która przeciwstawia się powstaniu w obwodzie prądu elektrycznego. Jest to określona ilość energii ukryta w obwodzie, którą odzyskuje się przy przerwaniu przepływu prądu. Przekonamy się, że jest ona zmagazynowana w polu magnetycznym.

Praca wykonana nad ładunkiem jednostkowym podczas jednego obiegu obwodu przeciwko SEM indukcji (stąd znak minus) jest równa $-\mathcal{E}$. W jednostce czasu przez przekrój obwodu przepływa ładunek równy I . Całkowita praca wykonana w jednostce czasu (dW/dt) nad wszystkimi ładunkami płynącymi w obwodzie wynosi

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\mathcal{E}I \\ &= LI \frac{dI}{dt}. \end{aligned}$$

Całkowitą pracę liczoną poczynając od prądu zerowego otrzymamy całkując powyższe równanie względem czasu

$$W = \frac{1}{2}LI^2. \quad (4.3)$$

Nie zależy ono od czasu przepływu prądu, lecz od jego końcowej wartości oraz geometrii układu poprzez L .

Istnieje bardziej ogólny sposób obliczenia energii W . Pamiętamy, iż L zostało wprowadzone jako współczynnik proporcjonalności w relacji wiążącej strumień magnetyczny przenikający przez pętlę obwodu z natężeniem prądu w pętli $\Phi = LI$. Można wykonać następujące przekształcenie

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \end{aligned}$$

gdzie S jest dowolną powierzchnią rozpiętą na pętli o obwodzie \mathcal{P} . Skoro

$$LI = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

zatem zgodnie z (4.3) pracę W można zapisać następująco

$$W = \frac{1}{2}I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

lub w równoważnej postaci

$$W = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl,$$

ponieważ $\mathbf{I} \parallel d\mathbf{l}$. W przypadku prądów objętościowych

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d^3r.$$

Możemy teraz posłużyć się prawem Ampère'a $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, aby zastąpić gęstość prądu \mathbf{J} przez pole magnetyczne

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d^3r.$$

Wyrażenie pod całką można przekształcić zgodnie z relacją umieszczoną w dodatku

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

i zapisaną w postaci

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Ostatecznie

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B^2 d^3r - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d^3r \right].$$

Twierdzenie Gaussa pozwala zamienić całkę objętościową z dywergencji na całkę z $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ po powierzchni S zamykającej obszar \mathcal{V}

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_{\mathcal{V}} B^2 d^3r - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \right].$$

Ponieważ gęstość prądu \mathbf{J} znika poza obszarem \mathcal{V} , powiększenie objętości całkowania powoduje wzrost całki objętościowej i zmniejszenie całki powierzchniowej. Pola \mathbf{A} i \mathbf{B} dążą do zera w miarę oddalania się od obszaru prądów \mathbf{J} . W granicy $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ dostajemy następujący wzór

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} B^2 d^3r.$$

Wynika z niego, że w polu magnetycznym jest zawarta energia o gęstości objętościowej $B^2/2\mu_0$. Zauważmy, jak podobne są w swojej strukturze wzory określające energię pola elektrycznego i magnetycznego:

$$W_{\text{elektr}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 d^3r,$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d^3r = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3r.$$

4.8 Elektrodynamika przed Maxwellem

Poznaliśmy dotychczas następujące równania na dywergencję i rotację pól elektrycznego i magnetycznego

- | | | |
|-------|---|-----------------|
| (i) | $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ | prawo Gaussa, |
| (ii) | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ | bezzródłowość, |
| (iii) | $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ | prawo Faradaya, |
| (iv) | $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$ | prawo Ampère'a, |

które obrazują stan wiedzy o elektromagnetyzmie w okresie przed Maxwellem. W równaniach tych ukryta jest pewna niespójność. Ma ona związek z podaną w dodatku tożsamością dotyczącą dywergencji z rotacji, która jest zawsze równa zeru. Podziałanie operatorem dywergencji na równanie (iii) daje

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}).$$

Prawa strona powyższego równania znika z powodu (ii). Takie samo przekształcenie dla równania (iv) pokazuje, że

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J})$$

prawa strona znika tylko w przypadku magnetostaticznym. Poza magnetostatyką prawo Ampère'a przestaje być spełnione.

James Clerk Maxwell urodził się w 1831 roku w Edynburgu jako syn lorda, umarł 1879 roku w Cambridge. Studia matematyki i fizyki rozpoczął w Edynburgu. Po trzech latach przeniósł się do Cambridge, gdzie ukończył studia w 1854 roku. W rok później opublikował swoją pierwszą pracę, która dotyczyła tego, co obecnie nazywamy równaniami Maxwella. Kompletnie równania Maxwella zostały opublikowane w Philosophical Magazine (1862) pod tytułem "On Physical Lines of Force". W 1864 roku napisał "This velocity is so near that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiation if any) is an electromagnetic disturbance in the form of wave propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws". W dwóch tomach "Treatise" opublikowanych w 1873 roku zawarte jest podsumowanie wszystkich wcześniejszych prac Maxwella. Równania Maxwella zostały tam przedstawione w dużo bardziej skomplikowanej formie. Ta oryginalna wersja została użyta ponownie dopiero przez Heinricha Hertza i Oliviera Heaviside'a po 14 latach zapomnienia.

Dobłą ilustracją niedostatku w sformułowaniu prawa Ampère'a, gdy prąd zmienia się w czasie, jest ładowanie kondensatora. Zastosowanie formuły całkowej

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_c$$

do różnych powierzchni rozpiętych na tym samym konturze C pokazuje, że prawa strona raz oznacza prąd płynący w obwodzie $I_c = I$, w inny przypadku, gdy powierzchnia nie przecina przewodnika i wchodzi w obszar kondensatora $I_c = 0$, gdyż nie ma tam żadnego prądu. Tym czasem lewa strona prawa Ampère'a jest w obu przypadkach taka sama. Maxwell usunął tę wadę prawa Ampère'a posługując się argumentacją czysto teoretyczną.

4.9 Poprawka Maxwella

Problem tkwi w dywergencji \mathbf{J} . Z równania ciągłości w ogólnym przypadku można otrzymać

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

co sugeruje możliwość powiązania $\epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ z gęstością prądu. Uzupełnienie prawej strony prawa Ampère'a takim wyrazem

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

sprawia, że dywergencja prawej strony znika. na mocy równania ciągłości. W ten sposób uogólnione zostało prawo Ampère'a, a przy okazji uratowano równanie ciągłości. Człon wprowadzony przez Maxwella jest trudny do wykrycia w zwykłych warunkach doświadczalnych przy słabozmiennych polach \mathbf{E} , gdzie musi współzawodniczyć z gęstością prądu \mathbf{J} . Zauważmy, że ε_0 jest rzędu 10^{-12} . Nie powinno nas dziwić, dlaczego nie został odkryty przez Faradaya i innych współczesnych mu badaczy, jeśli uwzględnimy ograniczenia istniejących wtedy przyrządów pomiarowych. Jest on istotny dla propagacji fali elektromagnetycznej. Nowy efekt wprowadza dodatkową symetrię w opisie pól elektrycznych i magnetycznych. Zmiana pola magnetycznego generuje pole elektryczne. Dziwne byłoby, gdyby zmiana pola elektrycznego nie wywołała analogicznego efektu powstania pola magnetycznego. Poza walorem estetycznym rozstrzygającym argumentem za takim sposobem poprawienia prawa Ampère'a były eksperymenty Hertza z falami elektromagnetycznymi, przeprowadzone w 1888 roku. Maxwell nazwał swój dodatkowy człon gęstością prądu przesunięcia. Jest to nazwa myląca. Wyraz $\varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ poza wymiarem nie ma nic wspólnego z gęstością prądu.

4.10 Równania Maxwella

Całą klasyczną elektrodynamikę można zapisać w postaci równań Maxwella

(i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$	prawo Gaussa,
(ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	beźródłowość,
(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$	prawo Faradaya,
(iv) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$	poprawione prawo Ampère'a

uzupełnionych wzorem na siłę Lorentza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

i drugą zasadą dynamiki Newtona. Bardziej konsekwentny wydaje się zapis równań Maxwella w formie, która podkreśla pochodzenie pól \mathbf{E} i \mathbf{B} , odpowiednio, od ładunków i prądów

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t) = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \quad (4.4)$$

W tej formie pola znajdują się po lewej stronie a ich źródła po prawej. Z równań Maxwella widzimy, jak ładunki wyznaczają pola. Wzór na siłę Lorentza łącznie z drugą zasadą dynamiki pokazuje, jak pola wpływają na ruch ładunków.

Gdyby istniał ładunek magnetyczny, to równania Maxwella przybrałyby jeszcze bardziej symetryczną postać

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\varepsilon_0) \rho_e & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = -\mu_0 \mathbf{J}_m \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t) = \mu_0 \mathbf{J}_e \end{array}$$

z gęstościami ładunku ρ_m i prądu magnetycznego \mathbf{J}_m . Oba rodzaje ładunków spełniałyby równania ciągłości, wyrażające prawa zachowania. Można się o tym przekonać obliczając dywergencję z równań (iii) oraz (iv). Mimo usilnych poszukiwań nie stwierdzono istnienia ładunków magnetycznych. Zgodnie ze stanem obecnej wiedzy \mathbf{B} nie występuje na równej stopie z \mathbf{E} – to znaczy nie istnieją statyczne źródła \mathbf{B} . W rozwinięciu multipolowym dla pola magnetycznego pierwszym nie znikającym wyrazem jest wyraz dipolowy odpowiadający zamkniętym obwódowi z prądem. Dirac zauważył na gruncie elektrodynamiki kwantowej, że istnienie ładunków magnetycznych wyjaśniałoby, dlaczego ładunki elektryczne są “skwantowane”, czyli przyjmują wartości będące wielokrotnością ładunku elektronu.

4.11 Równania Maxwella dla ośrodka materialnego

Równania Maxwella (4.4) są kompletne i ogólne. Jednak dla ośrodków materialnych, ulegających polaryzacji, wygodnie jest przetransformować równania Maxwella do postaci zawierającej kontrolowalne ładunki i prądy, które nazwalibyśmy swobodnymi. Przypomnijmy sobie, jak gęstość ładunku można podzielić na dwie części

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{sw} + \rho_{zw} \\ &= \rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}.\end{aligned}$$

Gęstość prądu składa się z trzech części

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_P \\ &= \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.\end{aligned}$$

O prądzie polaryzacyjnym o gęstości \mathbf{J}_P nie było dotychczas mowy. Jest on konsekwencją liniowego ruchu ładunków przy zmianie polaryzacji elektrycznej \mathbf{P} i spełnia równanie ciągłości, co łatwo sprawdzić

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J}_P &= \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{P}) \\ &= -\frac{\partial \rho_{zw}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Prawo Gaussa daje się zapisać w postaci

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

lub

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw},$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Poprawione prawo Ampère'a przybiera postać

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = & \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{sw}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \\ & + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

skąd dostajemy

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

gdzie, jak dotychczas

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}.$$

W języku ładunków i prądów swobodnych tylko dwa spośród czterech równań Maxwella ulegają zmianie. Poniższe równania

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{sw}} & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\text{sw}} + (\partial \mathbf{D} / \partial t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

nie są w niczym ogólniejsze od równań (4.4). Ich wadą jest występowanie dwóch par pól: \mathbf{E} i \mathbf{D} oraz \mathbf{B} i \mathbf{H} . Muszą więc być uzupełnione przez odpowiednie równania materiałowe dla ośrodka liniowego

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{i} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

skąd

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{i} \quad \mathbf{H} = (1/\mu) \mathbf{B}, \quad (4.6)$$

gdzie $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ oraz $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$.

4.12 Warunki graniczne

W ogólnym przypadku pola \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} i \mathbf{H} są nieciągłe na granicy dwóch ośrodków lub na powierzchni, na której istnieją ładunki powierzchniowe o gęstości σ lub prądy powierzchniowe o gęstości \mathbf{K} . Postać tych nieciągłości można wyprowadzić z równań Maxwella (4.5) zapisanych w postaci całkowej

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} &= Q_{\text{sw}} \\ \text{(ii)} \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= 0 \\ \text{(iii)} \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -(\text{d}/\text{dt}) \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \text{(iv)} \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_{\text{sw}} + (\text{d}/\text{dt}) \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

Stosując równanie (i) do nieskończenie cienkiej powierzchni Gaussa, obejmującej obie strony powierzchni S , otrzymuje się

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{\text{sw}}.$$

W analogiczny sposób otrzymujemy z (ii)

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0.$$

Zastosowanie równania (iii) do nieskończenie cienkiego konturu Ampère'a obejmującego powierzchnię S daje

$$E_1^\parallel - E_2^\parallel = 0.$$

W ten sam sposób z równania (iv) wnioskujemy, że równoległa do powierzchni składowa natężenia pola magnetycznego jest nieciągła

$$\mathbf{H}_1^\parallel - \mathbf{H}_2^\parallel = \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \mathbf{n}.$$

Są to ogólne warunki brzegowe.

W przypadku ośrodka liniowego warunki brzegowe można wyrazić tylko przez pole \mathbf{E} i \mathbf{B}

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varepsilon_1 E_1^\perp - \varepsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_{\text{sw}} & \text{(iii)} \quad E_1^\parallel - E_2^\parallel &= 0 \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp - B_2^\perp &= 0 & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_{\text{sw}} \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

Powyższe relacje są ważne w optyce przy badaniu odbicia i załamania fal elektromagnetycznych.

5

ZASADY ZACHOWANIA

5.1 Twierdzenie Poyntinga

Całkowita energia zawarta w polu elektromagnetycznym jest równa

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3r.$$

Mamy jakąś ustaloną konfigurację ładunków i prądów w danej chwili czasu t . Wytwarzają one pola \mathbf{E} i \mathbf{B} . W późniejszej chwili ładunki te będą w innych położeniach. Interesuje nas *praca wykonana przez siły elektromagnetyczne* działające na ładunki w przedziale czasu dt . Zgodnie z siłą Lorentza praca wykonana w czasie dt nad ładunkiem q posiadającym prędkość \mathbf{v} jest równa

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Ponieważ $q = \rho d^3r$ oraz $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, więc praca wykonana w jednostce czasu nad wszystkimi ładunkami zawartymi w objętości \mathcal{V} , czyli wyzwolona moc, wynosi

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d^3r. \quad (5.1)$$

Wielkość pod całką można wyrazić przez same pola. Skorzystamy w tym celu z równania Maxwella zawierającego prąd

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Reguła mnożenia

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

oraz równanie Maxwella wyrażające prawo Faradaya

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

pozwalają napisać

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

W ten sposób doszliśmy do wyniku

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Podstawienie do (5.1) i wykorzystanie twierdzenia Gaussa prowadzi do równania

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3r - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

które wyraża **twierdzenie Poyntinga**. Pierwsza całka po prawej stronie jest energią U_{em} zmagazynowana w polach. Druga całka określa prędkość wypływu energii z objętości \mathcal{V} przez powierzchnię ograniczającą S . Twierdzenie Poyntinga można sformułować następująco: *Praca sił elektromagnetycznych nad ładunkami jest równa ubytkowi energii pól pomniejszonej o energię, która wypłynęła przez powierzchnię ograniczającą rozważany obszar.*

Wielkość

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

nazywamy **wektorem Poyntinga**. Ponieważ $\mathbb{S} \cdot d\mathbf{s}$ umownie można uważać za część energii przepływającą przez infinitezymalną powierzchnię $d\mathbf{s}$ w jednostce czasu, zatem sam wektor Poyntinga \mathbb{S} można nazwać **gęstością** (objętościową) **strumienia energii**. Twierdzenie Poyntinga można zapisać w bardziej zwartej formie

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{\text{em}}}{dt} - \oint_S \mathbb{S} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.2)$$

Z lewej strony równania (5.2) kryje się wzrost energii mechanicznej układu dokonany kosztem ubytku energii elektromagnetycznej

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_{\text{mech}} d^3r.$$

Wykorzystując wzór na gęstość energii pola

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

dostajemy

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) d^3r = - \oint_S \mathbb{S} \cdot d\mathbf{s},$$

skąd po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \mathbb{S}.$$

Jest to różniczkowa postać twierdzenia Pointinga, a jednocześnie równanie ciągłości dla energii. Jeśli porównamy ten wynik z równaniem ciągłości dla ładunku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J},$$

to widzimy, że \mathbb{S} opisuje przepływ energii w taki sam sposób, w jaki \mathbf{J} opisuje przepływ ładunku.

5.2 Tensor napięć Maxwella

Obliczmy siłę działającą na ładunki znajdujące się w obszarze \mathcal{V}

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d^3r \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3r. \end{aligned}$$

Występującą tu gęstość siły

$$\mathbf{f} = (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

wyrazimy wyłącznie za pomocą pól. Do eliminacji ρ i \mathbf{J} posłużymy się pierwszym i ostatnim równaniem Maxwella

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}.$$

Zgodnie z regułą różniczkowania

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) + \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

i prawem Faradaya

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

ostatni wyraz we wzorze na gęstość siły \mathbf{f} można zapisać następująco

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Prowadzi to do wyrażenia

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \\ & - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Wykorzystamy obecnie regułę mnożenia, którą można wyprowadzić ze znanej relacji wektorowej $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, gdy jeden z wektorów zastąpimy operatorem różniczkowym. Wtedy

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

oraz

$$\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}.$$

Ponieważ $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, dodanie stronami dwóch ostatnich wzorów prowadzi do relacji

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}.$$

W szczególnym przypadku

$$\nabla(E^2) = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}),$$

skąd

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}.$$

Oczywiście, identyczny wzór obowiązuje dla wektora \mathbf{B} . Ostateczny wzór dla \mathbf{f} ma postać dość zagmatwaną

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Dla poprawienia symetrii dodano nic nie znaczący człon $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$, jako że $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Otrzymane wyrażenie można uprościć wprowadzając zapis tensorowy. Definiujemy tensor nazywany **tensorem napięć Maxwella**

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right).$$

Iloczyn wektora \mathbf{a} i tensora $\bar{\mathbb{T}}$ jest wektorem o współrzędnych

$$(\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbb{T}})_j = a_i T_{ij},$$

przy czym zastosowano tu umowę sumacyjną dla powtarzających się wskaźników, czyli i . W szczególności j -ta składowa dywergencji tensora $\bar{\mathbb{T}}$ wynosi

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{\mathbb{T}})_j &= \varepsilon_0 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right]. \end{aligned}$$

Siłę \mathbf{f} , działającą na jednostkową objętość można teraz zapisać w zwartej postaci

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \bar{\mathbb{T}} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial t},$$

gdzie \mathbb{S} jest wektorem Poyntinga. Całkowita siła działająca na ładunki z obszaru o objętości \mathcal{V} jest równa

$$\mathbf{F} = \oint_S \bar{\mathbb{T}} \cdot d\mathbf{s} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbb{S} d^3r. \quad (5.3)$$

Widać więc, że tensor $\bar{\mathbb{T}}$ reprezentuje siły i działające na jednostkową powierzchnię: składowe diagonalne są ciśnieniami, składowe pozadiagonalne są napięciami ścinającymi.

5.3 Pęd i moment pędu pola

W świetle drugiej zasady dynamiki

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt}$$

wzór (5.3) można przepisać jako

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbb{S} d^3r + \oint_S \bar{\mathbb{T}} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.4)$$

Pierwsza całka reprezentuje pęd zawarty w polu elektromagnetycznym

$$\mathbf{p}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{V}} \mathbb{S} d^3r,$$

podczas gdy druga – jest pędem przepływającym w jednostce czasu przez powierzchnię S . Równanie (5.4) wyraża zasadę zachowania pędu w elektrodynamice. Jak inne zasady zachowania, również i ta zasada może być zapisana w postaci równania ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\wp}_{\text{mech}} + \vec{\wp}_{\text{em}}) = \nabla \cdot \bar{\mathbb{T}},$$

gdzie

$$\vec{\varphi}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbb{S}$$

jest gęstością pędu pola, natomiast φ_{mech} jest gęstością pędu mechanicznego. Tensor $\bar{\mathbb{T}}$ odgrywa tu rolę gęstości (objętościowej) strumienia pędu, podobną do roli \mathbf{J} w równaniu ciągłości ładunku, czy \mathbb{S} w twierdzeniu Poyntinga. Warto w szczególności zwrócić uwagę na podwójną rolę wektora \mathbb{S} .

Pole elektromagnetyczne przestaje być przekaźnikiem sił. Jawi się w świetle uzyskanych wyników jako niezależny byt. Posiada własną energię

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right),$$

pęd

$$\vec{\varphi}_{\text{em}} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}),$$

a także można zdefiniować dla niego również i moment pędu

$$\vec{\ell}_{\text{em}} = \varepsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})].$$

6

FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

6.1 Fale elektromagnetyczne w próżni

W obszarach bez ładunków i prądów równania Maxwella przybierają postać

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t. \end{aligned}$$

Przez zastosowanie rotacji do równania (iii)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

oraz wykorzystanie tożsamości

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

dostajemy

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}),$$

co wobec równania (i) oraz (iv) daje

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Podobnie, zastosowanie rotacji do równania (iv) daje

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

skąd wobec $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ dostajemy równanie identyczne, jak w przypadku pola \mathbf{B} . Mamy teraz dwa równania drugiego rzędu dla pól \mathbf{E} i \mathbf{B}

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (6.1)$$

Każda składowa kartezyjska tych pól spełnia trójwymiarowe równanie falowe

$$\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (6.2)$$

Z równań Maxwella wynika, że w pustej przestrzeni mogą rozchodzić się fale elektromagnetyczne z prędkością

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$\varepsilon_0 = 8,8541878 \dots 10^{-12} \left(\frac{\text{A}}{\text{V}} \right) \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)$$

oraz

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{V}}{\text{A}} \right) \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)$$

po wymnożeniu dają

$$\varepsilon_0 \mu_0 = 1.11265 \cdot 10^{-17} \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2.$$

Stąd

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = 8.98755 \cdot 10^{16} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

a pierwiastek kwadratowy

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99792 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

okazuje się równy prędkości światła $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s w próżni. Dzisiaj wynik ten nikogo nie dziwi. Za czasów Maxwella był zdumiewający. Należy tu podkreślić kluczową rolę dodatkowego członu $\varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, dodanego przez Maxwella do prawa Ampère'a, bez którego nie otrzymalibyśmy równania falowego.

6.2 Równanie falowe

Poświęćmy chwilę uwagi samemu równaniu falowemu. Ograniczymy się na razie do jednego wymiaru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (6.3)$$

gdzie zamiast x i t można wprowadzić nowe zmienne

$$\eta = x - vt,$$

$$\xi = x + vt.$$

Pierwsze pochodne $\partial f/\partial x$ oraz $\partial f/\partial t$ łatwo dają się wyrazić przez pochodne funkcji f względem nowych zmiennych

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (-v) \frac{\partial f}{\partial \eta} + (v) \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

W podobny sposób otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right).$$

W nowych zmiennych jednowymiarowe równanie falowe redukuje się do postaci

$$\frac{\partial f}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Każda funkcja f zależna tylko od η lub tylko od ξ spełnia równanie falowe. Wybieramy rozwiązanie $f = g(\eta)$, czyli

$$f = f(x - vt).$$

Zachowanie stałej fazy $x - vt = \text{const}$ wymaga przemieszczania się w kierunku osi x z prędkością \dot{x} , wynikającą z równania

$$\dot{x} - v = 0,$$

skąd $v = \dot{x}$. W ten sposób dowiadujemy się, co oznacza współczynnik v w równaniu falowym (6.3). Drugie rozwiązanie $f = h(\xi)$ ze względu na $\xi = x + vt$ opisuje falę biegnącą w kierunku przeciwnym do osi x . Domyślamy się, że rozwiązaniem trójwymiarowego równania falowego jest każda funkcja postaci $f(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t)$.

6.3 Transformacja Fouriera

Miejsce to jest dobrą okazją, aby wspomnieć o możliwości przedstawienia odpowiednio regularnej funkcji $f(x)$ w formie całki¹

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Funkcję $\tilde{f}(k)$ nazywamy transformatą Fouriera (TF) funkcji $f(x)$. Jest ona określona przez całkę

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Jeśli $f=f(t)$ jest funkcją czasu, to analogicznie można obliczyć jej transformatę Fouriera \tilde{f} względem czasu zgodnie ze wzorami:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Relacje powyższe dają się uogólnić na odpowiednio regularną funkcję $f(x, y, z, t) = f(\mathbf{r}, t)$. Wtedy

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3k d\omega$$

oraz

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3r dt.$$

Czasami $\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega)$ nazywa się amplitudą fourierowską funkcji f .

Funkcja o postaci

$$f = \tilde{A} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{6.4}$$

gdzie \tilde{A} oznacza liczbę zespoloną², jest proporcjonalna do pojedynczej składowej fourierowskiej i spełnia równanie falowe, co można sprawdzić przez zwykłe podstawienie (6.4) do równania (6.2). Musi być jednak spełniony związek

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2,$$

¹Patrz dodatek B.2.

²Jest to konieczne, aby f było rzeczywiste.

który w postaci

$$\omega = |\mathbf{v}| |\mathbf{k}| \quad (6.5)$$

nazywa się *relacją dyspersyjną*. Falę (6.4) nazywa się *monochromatyczną falą płaską*. Jak widać, faza fali (6.4)

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$$

jest proporcjonalna do $(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$. Wektor \mathbf{k} nazywa się wektorem falowym. Transformacja Fouriera pozwala zatem przedstawić dowolną falę w postaci superpozycji fal płaskich o określonych wektorach falowych \mathbf{k} i częstościach ω .

Równania (6.3) dotyczą wektorów. Ich rozwiązania będą zatem miały postać

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (6.6)$$

stanowiącą uogólnienie (6.4). Korzyścią z używania transformat Fouriera jest łatwość liczenia dywergencji i rotacji. W przypadku pola $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ dostaje się

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \times \mathbf{A} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Różniczkowania po x , y i z sprowadza się do mnożenia przez odpowiednie składowe wektora \mathbf{k} .

6.4 Fale płaskie

Założmy, że fale poruszają się w kierunku osi z i nie zależą od x oraz y , co wymusza przyjęcie $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$. Wtedy zamiast ogólnego rozwiązania (6.6) dla pola $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \\ \mathbf{B}(z, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{E}}_0$ i $\tilde{\mathbf{B}}_0$ są amplitudami zespolonymi. Jak już wiemy, pola $\mathbf{E}(z, t)$ i $\mathbf{B}(z, t)$ spełniają równanie falowe (6.1). Aby miały sens fizyczny, muszą być dodatkowo zgodne ze wszystkimi równaniami Maxwella, które nakładają dodatkowe ograniczenia. Ponieważ $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ a $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$, więc zgodnie z pierwszą relacją (6.7)

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_0 = 0,$$

czyli pola elektryczne i magnetyczne są prostopadłe do kierunku \mathbf{k} . Fale o takich własnościach nazywamy poprzecznymi. W naszym przypadku, gdy $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$, oznacza to

$$\left(\tilde{\mathbf{E}}_0\right)_z = \left(\tilde{\mathbf{B}}_0\right)_z = 0,$$

czyli znikanie składowych z -owych (podłużnych) pól \mathbf{E} i \mathbf{B} . Z prawa Faradaya $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ oraz drugiej relacji (6.7) otrzymuje się

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \omega \tilde{\mathbf{B}}_0.$$

Pola \mathbf{E} i \mathbf{B} są nie tylko do siebie prostopadłe, ale i zgodne w fazie. Rzeczywiste amplitudy są powiązane wzorem $kE_0 = \omega B_0$. Ponieważ $\omega = ck$, więc

$$E_0 = cB_0.$$

Czwarte z równań Maxwella odtwarza poprzednie ograniczenie.

Oś z została wybrana w całkiem dowolny sposób. Łatwo można uogólnić dotychczasowe rozważania na płaskie fale monochromatyczne poruszające się w kierunku wyznaczonym przez wektor \mathbf{k} , przy zadanej polaryzacji $\hat{\mathbf{n}}$. Wtedy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}$$

a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}},$$

gdzie $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ jest wektorem jednostkowym, czy też

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t).$$

Ponieważ \mathbf{E} jest poprzeczne, więc

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0.$$

W postaci *explicite* rzeczywistej

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \hat{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

6.5 Energia i pęd fal elektromagnetycznych

Zgodnie ze wzorem na gęstość energii pola elektromagnetycznego

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

dla płaskiej fali monochromatycznej, gdzie

$$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \varepsilon_0 \mu_0 E^2,$$

wkłady od pola elektrycznego i magnetycznego są równe i

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_0 E^2 \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

Taka energia jest przenoszona przez falę. Gęstość strumienia energii określa wektor Poyntinga

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Dla płaskiej fali rozchodzącej się w kierunku osi z

$$\mathbb{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi) \hat{\mathbf{z}}.$$

Tak jak być powinno

$$\mathbb{S} = cu\hat{\mathbf{z}}.$$

Gęstość pędu dla pola wynosi

$$\wp = \frac{1}{c^2} \mathbb{S}.$$

Dla fal płaskich monochromatycznych

$$\begin{aligned} \wp &= \frac{1}{c} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{c} u \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Zwykle nie interesują nas fluktuacje pól. Wystarczają wtedy wartości średnie

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2, \\ \langle \mathbb{S} \rangle &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}, \\ \langle \wp \rangle &= \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Średnią moc na jednostkę powierzchni, przenoszoną przez falę, nazywa się natężeniem fali

$$I = \langle |\mathbb{S}| \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2.$$

W czasie Δt przekaz pędu prostopadłego do powierzchni A wynosi $\Delta \mathbf{p} = \langle \wp \rangle A c \Delta t$. **Ciśnienie promieniowania** (średnia siła na jednostkę powierzchni) wynosi

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{A} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}. \end{aligned}$$

6.6 Fale elektromagnetyczne w ośrodku materialnym

Przy braku ładunków i prądów swobodnych równania Maxwella (RM) przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \partial \mathbf{D} / \partial t. \end{aligned}$$

Zakładamy, że ośrodek jest liniowy

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

i jednorodny, czyli ε i μ są stałymi. Wtedy

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon \mu \partial \mathbf{E} / \partial t. \end{aligned}$$

Równania te różnią się od RM dla próżni zastąpieniem $\varepsilon_0 \mu_0$ przez $\varepsilon \mu$. Widać, że fale EM rozchodzą się w liniowym ośrodku jednorodnym z prędkością

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}},$$

czyli

$$v = \frac{c}{n},$$

gdzie

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

jest *współczynnikiem załamania* ośrodka. Dla $\mu \simeq \mu_0$ mamy $n \simeq \sqrt{\varepsilon_r}$, gdzie ε_r jest względną przenikalnością dielektryczną. Ponieważ $\varepsilon_r > 1$ więc $v < c$.

Gęstość energii wynosi

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)$$

a wektor Poyntinga

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Relacja dyspersji ma postać $\omega = \nu k$, a natężenie fali wynosi

$$I = \frac{1}{2} \nu \varepsilon E_0^2.$$

Spróbujemy zbadać zachowanie się fali EM na granicy dwóch ośrodków. Przy braku ładunków i prądów obowiązują warunki ciągłości (podrozdział 4.12) na powierzchni odgraniczającej dwa ośrodki dla składowych \mathbf{D} i \mathbf{B} prostopadłych do powierzchni granicznej (jako warunek znikania dywergencji) oraz składowych równoległych \mathbf{E} i \mathbf{H} (jako warunek znikania rotacji)

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varepsilon_1 E_1^\perp &= \varepsilon_2 E_2^\perp, & \text{(iii)} \quad \mathbf{E}_1^\parallel &= \mathbf{E}_2^\parallel, \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp &= B_2^\perp, & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel &= \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel. \end{aligned}$$

6.7 Odbicie i przenikanie fali do innego ośrodka

Rozpatrzmy powierzchnię graniczną między dwoma ośrodkami w postaci płaszczyzny. Wszystkie trzy fale mają tę samą częstotliwość

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v_2} \hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Liczby falowe są powiązane równaniem

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega,$$

skąd

$$k_I = k_R$$

oraz

$$k_I = \left(\frac{c}{v_1}\right) \left(\frac{v_2}{c}\right) k_T$$

lub

$$k_I = \frac{n_1}{n_2} k_T.$$

Warunki graniczne, które zostały sformułowane, muszą być spełnione dla wszystkich punktów płaszczyzny rozgraniczającej oba ośrodki. Zależność od \mathbf{r} i t zawarta jest w wykładnikach funkcji

$$e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r})}, e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})} \text{ i } e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})}$$

dla $z = 0$. Równość czynników przestrzennych prowadzi do związków

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \quad (6.8)$$

dla $z = 0$, czyli

$$k_{Ix} \cdot x + k_{Iy} \cdot y = k_{Rx} \cdot x + k_{Ry} \cdot y = k_{Tx} \cdot x + k_{Ty} \cdot y$$

dla wszystkich x oraz y . Dla $x = 0$ otrzymuje się

$$k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty},$$

a dla $y = 0$

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx}.$$

Bez utraty ogólności można tak wybrać osie układu współrzędnych, aby \mathbf{k}_I leżało w płaszczyźnie (x, z) , czyli \mathbf{k}_R oraz \mathbf{k}_T też będą leżały w tej płaszczyźnie. W ten sposób doszliśmy do praw optyki geometrycznej:

- Wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej do drugiego ośrodka leżą w tej samej płaszczyźnie – zwanej płaszczyzną padania. Jest ona wyznaczona przez wektor falowy fali padającej i normalną do płaszczyzny granicznej (tu oś z).
- Z równania (6.8) wynika, że

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$$

skąd dostajemy prawo odbicia

$$\theta_I = \theta_R$$

- oraz prawo załamania

$$n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T$$

zwane prawem Snella.

Efekty falowe zawarte są w warunkach granicznych po skróceniu funkcji wykładniczych:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \varepsilon_1 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R} \right)_z = \varepsilon_2 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0T} \right)_z \\
\text{(ii)} \quad & \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R} \right)_z = \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0T} \right)_z \\
\text{(iii)} \quad & \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R} \right)_{x,y} = \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0T} \right)_{x,y} \\
\text{(iv)} \quad & \frac{1}{\mu_1} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R} \right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0T} \right)_{x,y}
\end{aligned}$$

przy czym

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0.$$

Rozpatrzmy falę spolaryzowaną liniowo z wektorem \mathbf{B} prostopadłym do płaszczyzny padania (TM, typ p). Z warunku (i) mamy

$$\varepsilon_1 \left(-\tilde{E}_{0I} \sin \theta_I + \tilde{E}_{0R} \sin \theta_R \right) = \varepsilon_2 \left(-\tilde{E}_{0T} \sin \theta_T \right). \quad (6.9)$$

Warunek (ii) nic nie wnosi bo wektor $\mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{z}}$ i nie posiada składowych wzdłuż osi z . Z (iii) wynika

$$\tilde{E}_{0I} \cos \theta_I + \tilde{E}_{0R} \cos \theta_R = \tilde{E}_{0T} \cos \theta_T \quad (6.10)$$

Z warunku (iv) mamy

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} \left(\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} \right) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T} \quad (6.11)$$

Ze względu na prawa odbicia i załamania równania (6.9) i (6.11) przyjmują tę samą postać

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T}, \quad (6.12)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\varepsilon_2 n_1}{\varepsilon_1 n_2} = \frac{\varepsilon_2 \mu_2 \mu_1 n_1}{\varepsilon_1 \mu_1 \mu_2 n_2} = \frac{v_1^2 \mu_1 n_1}{v_2^2 \mu_2 n_2} \\
&= \frac{v_1^2 c}{v_2^2 v_1} \frac{v_2 \mu_1}{c \mu_2} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}.
\end{aligned}$$

Równanie (6.10) przybiera postać

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \alpha \tilde{E}_{0T}, \quad (6.13)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}.$$

Równania (6.12) i (6.13)

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{0R} + \beta\tilde{E}_{0T} &= \tilde{E}_{0I}, \\ -\tilde{E}_{0R} + \alpha\tilde{E}_{0T} &= \tilde{E}_{0I}\end{aligned}$$

można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{0R} \\ \tilde{E}_{0T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{E}_{0I}.$$

Ponieważ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha + \beta,$$

zatem

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{0R} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \tilde{E}_{0I} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \\ \tilde{E}_{0T} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \tilde{E}_{0I} = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}.\end{aligned}$$

Otrzymane wzory

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{0R} &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \\ \tilde{E}_{0T} &= \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}\end{aligned}$$

są znane jako *równania Fresnela* dla fali typu TM. W podobny sposób otrzymuje się równania Fresnela dla fali typu TE (lub s) z wektorem polaryzacji pola \mathbf{E} prostopadłym do płaszczyzny padania.

Współczynnik α zależy od kąta padania

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} \\ &= \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I}.\end{aligned}$$

Dla $\theta_I = \pi/2$ mamy $\alpha \rightarrow \infty$, a to oznacza $\tilde{E}_{0T} \rightarrow 0$, czyli całkowite odbicie. Istnieje jeszcze kąt pośredni θ_B zwany *kątem Brewstera*, przy którym fala odbita jest całkowicie wytłumiona. Zgodnie z pierwszym wzorem Fresnela powinno to nastąpić przy $\alpha = \beta$;

$$\alpha^2 = \frac{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_B}{1 - \sin^2 \theta_B} = \beta^2.$$

Stąd

$$1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_B = \beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta_B,$$

co prowadzi do wzoru

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}.$$

Zwykle $\mu_1 \simeq \mu_2$ i wtedy $\beta \simeq n_2/n_1$, co oznacza

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_B &= \frac{1 - \beta^2}{1/\beta^2 - \beta^2} \\ &= \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^4} \beta^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\sin^2 \theta = \text{tg}^2 \theta / (1 + \text{tg}^2 \theta)$, stad

$$\text{tg} \theta_B \simeq \frac{n_2}{n_1}.$$

Natężenie fali padającej na powierzchnię graniczną wynosi

$$I_I = \frac{1}{2} v_1 \varepsilon_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I,$$

gdzie $\cos \theta_I$ pojawia się z powodu kąta między \mathbb{S} i $\hat{\mathbf{z}}$ (czoło fali pada pod kątem na powierzchnię graniczną). Odpowiednio natężenia fali odbitej i przechodzącej wynoszą

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{1}{2} v_1 \varepsilon_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R \\ I_T &= \frac{1}{2} v_2 \varepsilon_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T. \end{aligned}$$

Współczynniki odbicia i transmisji dla fali TM wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \\ T &= \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \end{aligned}$$

Oczywiście $R + T = 1$, czego wymaga zasada zachowania energii.

6.8 Fale EM w przewodnikach

W przewodnikach $\rho_{sw} \neq 0$ oraz $\mathbf{J}_{sw} = \sigma \mathbf{E}$. Przy tych założeniach równania Maxwella przybierają postać

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho_{sw} & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -(\partial \mathbf{B} / \partial t) \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \varepsilon (\partial \mathbf{E} / \partial t) \end{aligned}$$

Równanie ciągłości

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{sw} = -\frac{\partial \rho_{sw}}{\partial t}$$

łącznie z prawem Ohma i Gaussa prowadzi do równania

$$\frac{\partial \rho_{sw}}{\partial t} = -\sigma (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_{sw},$$

które łatwo rozwiązać

$$\rho_{sw}(t) = \rho_{sw}(0) e^{-(\sigma/\varepsilon)t}.$$

Początkowa gęstość ładunku swobodnego $\rho_{sw}(0)$ rozplywa się z czasem charakterystycznym

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

Po tym czasie możemy uważać, że $\rho_{sw} = 0$. Równania Maxwella różnią się od odpowiednich równań dla ośrodków nieprzewodzących tylko ostatnim członem w ostatnim równaniu

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -(\partial \mathbf{B} / \partial t), \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \varepsilon (\partial \mathbf{E} / \partial t). \end{aligned}$$

Obliczamy rotację dwu ostatnich równań Maxwella

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}), \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Wykorzystujemy dwa pierwsze równania (i) oraz (ii), co w połączeniu z tożsamością dotyczącą rotacji z rotacji pól \mathbf{E} i \mathbf{B} daje

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \sigma \mathbf{E} \right), \\ -\Delta \mathbf{B} &= -\varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

skąd

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.15)$$

$$\Delta \mathbf{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.16)$$

Poszukujemy rozwiązań tych równań w postaci fal płaskich

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \quad (6.17)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \quad (6.18)$$

Podstawienie (6.17) i (6.18) do (6.15) i (6.16) pokazuje, że liczba falowa musi być zespolona

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon \mu \omega^2 + i \mu \sigma \omega. \quad (6.19)$$

Przyjmując \tilde{k} w postaci

$$\tilde{k} = k + i\kappa \quad (6.20)$$

można wyznaczyć część rzeczywistą k i urojoną κ . Obliczenie pierwiastka z (6.19) można przeprowadzić przez podstawienie (6.20) do (6.19) i porównanie części rzeczywistych i urojonych

$$\begin{aligned} k^2 - \kappa^2 &= \varepsilon \mu \omega^2 \\ 2k\kappa &= \mu \sigma \omega. \end{aligned}$$

Eliminacja κ z pierwszego równania prowadzi do równania dwukwadratowego

$$k^4 - \varepsilon \mu \omega^2 k^2 - \frac{1}{4} \mu^2 \sigma^2 \omega^2 = 0.$$

Jeden z pierwiastków ma postać

$$k^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \mu \omega^2 \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} \right].$$

Jego wykorzystanie w drugim równaniu pozwala na następujący wybór rozwiązań

$$k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2},$$

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}.$$

Część urojona \tilde{k} prowadzi do tłumienia

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\varkappa z} e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(z, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\varkappa z} e^{i(kz - \omega t)}.\end{aligned}$$

Wielkość

$$d = \frac{1}{\varkappa}$$

nazywa się *głębokością wnikaną fali* do przewodnika. Część rzeczywista określa długość fali

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

prędkość rozchodzenia się fali

$$v = \frac{\omega}{k}$$

oraz współczynnik załamania

$$n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega}.$$

Równania Maxwella, tak jak poprzednio, nakładają dodatkowe ograniczenia na amplitudy, fazy i polaryzację pól \mathbf{E} i \mathbf{B} . Równania (i) i (ii) dotyczące dywergencji usuwają składowe z : pola są więc poprzeczne. Orientujemy osie układu współrzędnych w taki sposób, aby \mathbf{E} było spolaryzowane wzdłuż osi x

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\varkappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}.$$

Z równania (iii) otrzymujemy

$$\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\varkappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}},$$

co staje się zrozumiałe, jeśli pamiętamy, że dla transformat Fouriera $\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$, $\partial \mathbf{E} / \partial t = -i\omega \mathbf{E}$. Równanie (iv) daje to samo. Ponownie $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Tym razem pola \mathbf{E} i \mathbf{B} nie są w tej samej fazie, gdyż

$$\tilde{k} = |\tilde{k}| e^{i\alpha},$$

gdzie

$$|\tilde{k}|^2 = k^2 + \varkappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2}$$

a

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\kappa}{k}\right)$$

jest przesunięciem fazowym $\alpha_B - \alpha_E = \alpha$. Porównanie amplitud fourierowskich pól \mathbf{E} i \mathbf{B} pozwala ustalić ich postać rzeczywistą

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \alpha_E) \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{B}(z, t) &= B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \alpha_E + \alpha) \hat{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Pole magnetyczne opóźnia się względem pola elektrycznego (wymagany jest dodatkowy czas $t' > 0$, aby $-\omega t' + \alpha = 0$, co oznacza zrównanie faz obu pól).

6.9 Odbicie od powierzchni przewodzącej

Rozważmy monochromatyczną falę płaską spolaryzowaną w kierunku osi x , padającą z lewej strony na płaszczyznę xy odgraniczającą ośrodek dielektryczny (1) od przewodnika (2)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) &= \tilde{E}_{0I} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) &= \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Fala ta spowoduje powstanie fali odbitej

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) &= \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) &= -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

i fali przechodzącej

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) &= \tilde{E}_{0T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) &= \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_{0T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}},\end{aligned}$$

która biegnie jak fala padająca (a przeciwnie niż fala odbita) lecz jest tłumiona w przewodniku.

Na powierzchni granicznej ($z = 0$) wypadkowa fala w ośrodku (1) musi łączyć się z falą w ośrodku (2), spełniając warunki graniczne

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \varepsilon_1 E_1^\perp - \varepsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_{sw} & \text{(iii)} \quad \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel &= 0 \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp - B_2^\perp &= 0 & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_{sw} \times \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

($\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni granicznej, po której płynie prąd o gęstości powierzchniowej \mathbf{K}_{sw} , skierowanym od ośrodka (2) do ośrodka (1). Dla przewodników spełniających prawo Ohma $\mathbf{K}_{sw} = 0$. Ponieważ nie ma składowej prostopadłej

pól z obu stron (fala jest poprzeczna i nie ma składowej wzdłuż osi z), więc z warunku (i) wynika $\sigma_{sw} = 0$. Z warunku (iii) mamy

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T},$$

a z warunku (iv), po przeliczeniu pola \mathbf{B} na \mathbf{E} ,

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega} \tilde{E}_{0T} = 0.$$

Inaczej

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \tilde{\beta} \tilde{E}_{0T},$$

gdzie

$$\tilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań już znamy z wcześniejszego badania zachowania się fali na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych (nieprzewodzących)

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{0R} &= \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \tilde{E}_{0I}, \\ \tilde{E}_{0T} &= \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \tilde{E}_{0I}. \end{aligned}$$

Podobieństwo do wcześniejszego wyniku jest jedynie formalne. Obecnie $\tilde{\beta}$ jest wielkością zespoloną. Dla bardzo dobrego przewodnika $\sigma \rightarrow \infty$, $\tilde{k}_2 \rightarrow \infty$ i $\beta \rightarrow \infty$, skąd

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0.$$

Dla warstw metalicznych o grubości większej niż głębokość wnikania d (rzędu 100 Å dla Ag) fala padająca zostaje całkowicie odbita ze zmianą fazy o π . W ten sposób tłumaczą się silne własności odbijające powierzchni wykonanych z dobrych przewodników. Własność tę wykorzystuje się w zwierciadłach metalicznych. Z materiałów nieprzewodzących można wykonać tak zwane *zwierciadła Bragga*. Zawierają one zwykle kilkanaście warstw materiałów o dwóch różnych współczynnikach załamania. Grubość warstw dobiera się do częstotliwości fali, która ma być odbita.

6.10 Falowody

Zajmiemy się obecnie falami w ograniczonej przestrzeni. Może to być wewnątrz długiej pustej metalowej rury, którą nazywać będziemy falowodem. Zakładamy, że falowód jest wykonany

z bardzo dobrego przewodnika, w którym zarówno $\mathbf{E} = 0$ jak i $\mathbf{B} = 0$. Warunki brzegowe na wewnętrznej ścianie falowodu mają postać

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathbf{E}^{\parallel} = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \mathbf{B}^{\perp} = 0. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Ponieważ $\mathbf{E} = 0$ wewnątrz przewodnika, to zgodnie z prawem Faradaya $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$. Jeśli na początku mieliśmy $\mathbf{B} = 0$, to pozostanie ono równe zero. Na powierzchni falowodu zaindukowane zostaną takie swobodne ładunki i prądy powierzchniowe, aby nie było składowej normalnej pola \mathbf{E} i składowej stycznej pola \mathbf{H} we wnętrzu doskonałego przewodnika³.

Zajmiemy się falami monochromatycznymi, które mogą rozchodzić się wzdłuż rury falowodowej

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \\ \text{(ii)} \quad & \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned}$$

Ograniczymy się do rzeczywistych wartości k . Pola \mathbf{E} i \mathbf{B} we wnętrzu falowodu spełniają następujące równania Maxwella

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad & \nabla \times \mathbf{E} = -(\partial\mathbf{B}/\partial t), \\ \text{(ii)} \quad & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad & \nabla \times \mathbf{B} = c^{-2}(\partial\mathbf{E}/\partial t). \end{aligned}$$

Pokażemy, że fale ograniczone do wnętrza falowodu nie mogą być poprzeczne. Spełnienie warunków brzegowych wymaga włączenia składowych podłużnych (E_z i B_z)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_0 &= (E_x, E_y, E_z), \\ \tilde{\mathbf{B}}_0 &= (B_x, B_y, B_z). \end{aligned}$$

Każda ze składowych amplitud E_x, E_y, \dots, B_z jest funkcją x i y . Podstawienie do dwóch ostatnich równań Maxwella daje

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z, & \text{(iv)} \quad & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_z, \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x, & \text{(v)} \quad & \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x, \\ \text{(iii)} \quad & ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y, & \text{(vi)} \quad & ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_y. \end{aligned}$$

Równania (ii), (iii), (v) i (vi) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & -k & -\omega & 0 \\ 0 & \omega/c^2 & k & 0 \\ \omega/c^2 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} \partial E_z / \partial x \\ -\partial E_z / \partial y \\ \partial B_z / \partial z \\ -\partial B_z / \partial y \end{pmatrix}$$

³Tuż przy zewnętrznej stronie powierzchni doskonałego przewodnika tylko te składowe ($\mathbf{E}^{\perp}, \mathbf{H}^{\parallel}$) mogą być różne od zera (patrz [2], cz.2).

skąd prosta choć uciążliwa droga prowadzi do wyznaczenia

$$E_x = \frac{1}{i\Delta} \begin{vmatrix} \partial E_z / \partial x & 0 & 0 & -\omega \\ -\partial E_z / \partial y & -k & -\omega & 0 \\ \partial B_z / \partial z & \omega / c^2 & k & 0 \\ -\partial B_z / \partial y & 0 & 0 & -k \end{vmatrix},$$

oraz pozostałych składowych: E_y , B_x i B_y . Wyznacznik układu równań ma postać

$$\Delta = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^2.$$

Można sprawdzić, że

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right), \\ \text{(ii)} \quad E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right), \\ \text{(iii)} \quad B_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ \text{(iv)} \quad B_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Znajomość składowych podłużnych wystarcza do wyznaczenia pozostałych składowych. Wykorzystanie ostatnich wzorów w równaniach Maxwella (i) i (iv) prowadzi do dwóch niesprzężonych równań dla E_z i B_z

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_z = 0 \end{aligned}.$$

W przypadku $E_z = 0$ mówimy o falach poprzecznych elektrycznych (TE); gdy $B_z = 0$ – to o falach poprzecznych magnetycznych (TM); jeśli $E_z = 0$ i $B_z = 0$ – to o falach poprzecznych elektromagnetycznych (TEM). Fale TEM nie mogą występować w pustym falowodzie. Aby to pokazać nie możemy wykorzystać ostatnich wyników, gdyż dla fali TEM znika wyznacznik Δ . Należy się cofnąć do równań Maxwella. W przypadku $E_z = B_z = 0$ wektor

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = (E_x, E_y)$$

ma zerową dywergencję i rotację w dwóch wymiarach, co wyprowadza się z prawa Gaussa i prawa Faradaya. Można zatem $\tilde{\mathbf{E}}_0$ wyrazić przez gradient potencjału skalarnego, który spełnia równanie Laplace'a. Warunek (6.21i) oznacza, że powierzchnia przewodnika musi być ekwipotencjalna (pole jest prostopadłe do powierzchni stałego potencjału). Wobec tego potencjał wewnątrz całego falowodu jest wszędzie taki sam, czyli stały. Równanie Laplace'a nie dopuszcza lokalnych ekstremów. Oznacza to zerowe pole $\tilde{\mathbf{E}}_0$. Zatem nie pojawi się żadna fala TEM. Uzyskany wynik nie stosuje się do falowodu z metalicznym rdzeniem, którego potencjał może być inny niż części zewnętrznej (osłony, płaszczka).

6.10.1 Przypadek falowodu prostokątnego

Niech falowód prostokątny ma wysokość $x = a$ i szerokość $y = b$. Rozpatrzmy falę TE spełniającą równanie (ii) przy warunkach brzegowych (6.21). Zaczniemy od rozdzielania zmiennych

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y).$$

Wtedy

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) XY = 0.$$

Po podzieleniu przez XY dostajemy człony zależne od x i y , które muszą być stałe, jeśli równanie ma być spełnione dla różnych wartości x i y

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (1/X) (d^2 X/dx^2) = -k_x^2 \\ \text{(ii)} \quad & (1/Y) (d^2 Y/dy^2) = -k_y^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Współczynniki k_x i k_y są tymi stałymi i spełniają równanie

$$-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \quad (6.24)$$

Ogólne rozwiązanie równania (6.23i) ma postać

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x).$$

Warunki graniczne dotyczą B^\perp , które musi znikać. Zgodnie z (6.22iii)

$$B_x \sim \frac{\partial B_z}{\partial x}.$$

Znikanie B_x prowadzi do warunku $\partial B_z / \partial x = 0$ dla $x = 0$ i $x = a$. Stąd $A = 0$ i

$$k_x = m\pi/a, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.25)$$

Dla funkcji Y wynik jest analogiczny

$$k_y = n\pi/a, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.26)$$

Ostatecznie

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b).$$

Rozwiązanie powyższe nazywa się modem TE_{mn} . Jeżeli $a \geq b$, to pierwszy wskaźnik dotyczy większej krawędzi falowodu. Aby istniało rozwiązanie falowodowe, co najmniej jeden wskaźnik musi być różny od zera. Liczbę falową otrzymujemy z równania (6.24)

$$k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2 \left[(m/a)^2 + (n/b)^2 \right]}. \quad (6.27)$$

Jeżeli

$$\omega < \omega_{mn},$$

gdzie

$$\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

to liczba falowa jest urojona i zamiast fali pojawiają się pola tłumione wykładniczo. Częstość ω_{mn} nazywa się częstością odcięcia dla modu TE_{mn} . Najniższa częstość odcięcia dla danego falowodu prostokątnego występuje dla modu TE_{10} . Wtedy

$$\omega_{10} = \frac{c\pi}{a}.$$

Fale o mniejszych częstościach nie mogą rozchodzić się w danym falowodzie.

Relację dyspersji (6.27) można zapisać przy użyciu częstości odcięcia

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_{mn}^2}. \quad (6.28)$$

Widać, że prędkość fazowa

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\omega_{mn}}{k}\right)^2} > c$$

jest większa od c . Energia jest przenoszona z prędkością grupową

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 / \sqrt{c^2 + \left(\frac{\omega_{mn}}{k}\right)^2} < c,$$

która jest zawsze mniejsza od c . Można to wydedukować z wykresów zależności dyspersyjnych dla modów prowadzonych TE.

Istnieje inny sposób przedstawienia rozchodzenia się fali w falowodzie przy wykorzystaniu tak zwanego modelu "zygzak". Wyobraźmy sobie falę płaską rozchodzącą się pod kątem θ do osi z i odbijającą się bez strat od powierzchni przewodzących. W kierunku x i y mogą przetrwać wielokrotnie odbite fale, jeśli utworzą fale stojące o długościach $\lambda_x/2 = a/m$ i $\lambda_y/2 = b/n$. Stąd pojawiają się liczby falowe $k_x = 2\pi/\lambda_x = \pi m/a$ i $k_y = \pi n/b$. W kierunku z pozostaje fala rozchodząca się z liczbą falową $k_z = k$. Wektor falowy pierwotnej fali płaskiej wynosi

$$\mathbf{k}' = \left(\frac{\pi m}{a}, \frac{\pi n}{b}, k\right).$$

Relacja dyspersji

$$\begin{aligned} \omega &= c |\mathbf{k}'| = c \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{c^2 k^2 + \omega_{mn}^2} \end{aligned}$$

pokrywa się z wynikiem (6.28).

Ponieważ $k = k' \hat{\mathbf{z}}$ jest składową z wektora k' , więc z relacji

$$k = |\mathbf{k}'| \cos \theta \quad (6.29)$$

wynika, że tylko niektóre kąty θ , spełniające relację

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{k}{|\mathbf{k}'|} = \frac{ck}{\omega} \\ &= ck / \sqrt{c^2 k^2 + \omega_{mn}^2}, \end{aligned}$$

prowadzą do dozwolonych fal stojących przy zadanym k . Fala płaska rozchodzi się z prędkością c pod kątem θ do osi z . Prędkość wzdłuż falowodu jest jej składową w kierunku osi z i wynosi

$$\begin{aligned} v_g &= c \cos \theta \\ &= c^2 / \sqrt{c^2 + (\omega_{mn}/k)^2}, \end{aligned}$$

co pokrywa się z wcześniejszym wynikiem dla prędkości grupowej. Powierzchnia stałej fazy (płaszczyzna – w naszym przypadku) przesuwa się o λ w ciągu jednego okresu T w kierunku wektora k' . W tym samym czasie ta sama płaszczyna przesuwa się o odcinek d wzdłuż osi z . Zgodnie ze wzorem (6.29)

$$\frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta.$$

Po podstawieniu $\lambda = cT$ oraz $d = vT$ otrzymamy prędkość

$$v = \frac{c}{\cos \theta} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\omega_{mn}}{k}\right)^2},$$

która jest równa wcześniej otrzymanej prędkości fazowej.

7

POTENCJAŁY I POLA

7.1 Potencjał skalarny i wektorowy

Przyjmujemy, że znane są rozkłady ładunków $\rho(\mathbf{r}, t)$ i prądów $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$. Mając do dyspozycji równania Maxwella

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial\mathbf{B}/\partial t, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t, \end{aligned}$$

postaramy się określić pola $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Wygodniej jest, zamiast rozwiązywać bezpośrednio równania Maxwella, wprowadzić potencjały. Otrzymamy w ten sposób mniejszą liczbę równań drugiego rzędu. W elektrostatyce używaliśmy potencjału skalarnego V , a w magnetostatyce potencjału wektorowego \mathbf{A} .

Równość $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ zachodzi również dla pól zmiennych w czasie. Możemy więc napisać jak w magnetostatyce

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{7.1}$$

używając potencjału wektorowego \mathbf{A} . Wtedy z prawa Faradaya (iii)

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Znikająca rotacja oznacza, że wielkość w nawiasie może być przedstawiona przez gradient funkcji skalarnej V , skąd dostajemy

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{7.2}$$

Równania Maxwella (ii) i (iii) są spełnione automatycznie. Układ czterech równań niejednorodnych może być zastąpiony w języku potencjałów przez dwa równania, które wyrażają prawa Gaussa (i) i Ampère'a (iv)

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (7.3)$$

$$\left(\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (7.4)$$

Do otrzymania ostatniego równania użyto tożsamości $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. Równania te są ze sobą powiązane. Aby je rozseparować można wykorzystać dowolność wyboru potencjałów. Ze względu na (7.1) potencjał \mathbf{A} jest wyznaczony z dokładnością do gradientu dowolnej funkcji skalarnej λ . Przy transformacji

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda. \quad (7.5)$$

\mathbf{B} nie ulega zmianie. Aby nie uległo również zmianie pole \mathbf{E} , należy przekształcić jednocześnie potencjał skalarny

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (7.6)$$

Wtedy rzeczywiście z (7.2) widzimy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \\ &= -\nabla V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \lambda - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \lambda \\ &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Korzystając z dowolności wyboru potencjałów zawartej w (7.5) i (7.6) można zażądać, aby

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (7.7)$$

Taki wybór prowadzi do rozseparowania pary równań (7.3) i (7.4) na dwa niezależne niejednorodne równania falowe

$$\Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (7.8)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (7.9)$$

Są one wraz z warunkiem (7.7) równoważne równaniom Maxwella.

7.2 Transformacja cechowania

Transformację potencjałów (7.5) i (7.6) nazywa się **transformacją cechowania**, a niezmienniczość pól względem takich transformacji nazywa się **niezmienniczością** względem transformacji cechowania. Związek (7.7) nazywa się **cechowaniem Lorentza**. Zaletą cechowania Lorentza jest jednakowe wyrażenie obu potencjałów V i \mathbf{A} poprzez ten sam operator różniczkowy zwany **d'alambertjanem**

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \square V &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \\ \text{(ii)} \quad \square \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Nawet wśród potencjałów spełniających (7.7) jest jeszcze spora dowolność. Cechowanie to w sposób naturalny przystaje do szczególnej teorii względności. Będzie ono wykorzystywane w dalszych rozważaniach.

Innym cechowaniem potencjałów jest tak zwane cechowanie Coulomba. W tym cechowaniu wybiera się jak w magnetostatyce $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Wtedy potencjał skalarny spełnia równanie Poissona $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$ a potencjał wektorowy niejednorodne równanie falowe. Cechowanie to jest użyteczne w elektrodynamice kwantowej. Jest również używane, gdy nie ma źródeł. Wtedy dla $V = 0$ potencjał \mathbf{A} spełnia jednorodne równanie falowe $\square \mathbf{A} = 0$, a pola są określone wzorami

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

7.3 Potencjały opóźnione

W przypadku statycznym równania (7.10) redukują się do czterech równań Poissona: jednego dla V i trzech dla potencjału wektorowego \mathbf{A} , ze znanymi rozwiązaniami

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d^3r', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} d^3r', \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{R} oznacza odległość od punktu \mathbf{r}' (gdzie jest źródło) do punktu obserwacji pola \mathbf{r} . Ponieważ informacja o stanie pola rozchodzi się z prędkością fali EM, czyli światła, więc w przypadku niestatycznym oczekujemy rozwiązań

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{R}} d^3r' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{R}} d^3r' \end{aligned}$$

z czasem wziętym w chwili wcześniejszej t_r , zwanej czasem opóźnionym (*retarded*), przesuniętym do tyłu w stosunku do czasu obserwacji

$$t_r = t - \frac{\mathcal{R}}{c}.$$

Potencjały określone powyższymi wzorami nazywa się **potencjałami opóźnionymi**. Poprawność zapostulowanych wzorów należy sprawdzić przez obliczenie gradientu, a następnie dywergencji. Obliczony w ten sposób laplasjan jest zgodny z równaniami (7.8) i (7.9). Należy pamiętać, że funkcje podcałkowe zależą od \mathbf{r} w dwóch miejscach: w mianowniku zawierającym \mathcal{R} oraz pośrednio poprzez czas t_r , który również zawiera \mathcal{R} . Formalnie te same równania są spełnione przez potencjały z czasem przedwczesnym $t_\alpha = t + \mathcal{R}/c$. Wynika to z symetrii równań Maxwella względem odwrócenia czasu. Potencjały te naruszają w oczywisty sposób zasadę przyczynowości i nie mają bezpośredniego sensu fizycznego.

Mając potencjały opóźnione można wyznaczyć pola

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Po przeprowadzeniu odpowiednich rachunków otrzymuje się wzory

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2\mathcal{R}} \right] d^3r',$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{R}^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathcal{R}} \right] \times \hat{\mathcal{R}} d^3r',$$

stanowiące uogólnienie prawa Coulomba i prawa Biota-Savarta na przypadek źródeł zależnych od czasu. Kropki oznaczają pochodne cząstkowe względem czasu t . W przybliżeniu *quasi*-statycznym, to znaczy dla wolnozmiennych ładunków i prądów, otrzymuje się prawo Coulomba i prawo Biota-Savarta bez opóźnienia w czasie, to znaczy dla $t_r = t$.

8

ELEKTRODYNAMIKA I TEORIA WZGLĘDNOŚCI

8.1 Zasada względności Galileusza

Aby opisać cokolwiek posługując się fizyką, należy wybrać pewien układ odniesienia oraz związane z tym układem zegary, służące do odmierzenia czasu. Zmiana układu odniesienia zwykle wpływa na postać równań opisujących prawa przyrody. Jeśli weźmie się przypadkowy układ odniesienia, to nawet proste zjawisko może być przedstawione w nim w sposób złożony. Pojawia się więc problem wyboru takiego układu odniesienia, w którym prawa przyrody byłyby przedstawione najprościej.

Istnieją układy odniesienia, zwane **układami inercjalnymi**, w których ruch swobodny (nie poddany zewnętrznym oddziaływaniom) odbywa się ze stałą prędkością \mathbf{v} (traktowaną w sensie wektorowym). Twierdzenie o istnieniu inercjalnych układów odniesienia jest treścią pierwszej zasady dynamiki. Własność inercjalności łączy się z jednorodnością i izotropowością przestrzeni oraz jednorodnością czasu. Skutkiem tej własności jest np. niezależność ruchu swobodnego od kierunku w przestrzeni. Istnienie jednego układu odniesienia pociąga za sobą istnienie nieskończenie wielu innych układów inercjalnych, które poruszają się względem siebie ze stałymi prędkościami.

Odkryto, że różne układy odniesienia są sobie równoważne nie tylko z punktu widzenia ruchu swobodnego. Doświadczenie pokazuje, że słuszna jest **zasada względności**:

|| Wszystkie prawa przyrody są jednakowe we wszystkich
|| inercjalnych układach odniesienia.

Oznacza to, że równania wyrażające prawa przyrody są współzmiennicze ze względu na przekształcenia współrzędnych i czasu przy przejściu z jednego do drugiego inercjalnego układu odniesienia. Obok zasady względności w podstawach mechaniki klasycznej tkwi

założenie o istnieniu jednego czasu, tak zwanego czasu absolutnego. Założenie to wraz z zasadą względności nazywa się **zasadą względności Galileusza**.

Współrzędne \mathbf{r} i \mathbf{r}' tego samego punktu w różnych inercjalnych układach odniesienia K i K' , z których drugi porusza się z prędkością \mathbf{V} względem pierwszego powiązane są relacją

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \quad (8.1)$$

gdzie czas jest jednakowy w obu układach

$$t = t'. \quad (8.2)$$

Konsekwencją transformacji Galileusza (8.1) i (8.2) jest prawo dodawania prędkości

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

8.2 Transformacja Lorentza

Elektrodynamika narusza prawo dodawania prędkości dla sygnałów świetlnych. Doświadczenia Michelsona i Morleya pokazały, że

$$\mathbf{v} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c}.$$

Należy zatem odrzucić transformację Galileusza i zastąpić ją inną. Ponadto zastosowanie transformacji Galileusza do równań Maxwella pokazuje, że zmienia ona ich postać, co przeczy zasadzie względności. Okazuje się jednak, że jeśli dopuścimy możliwość przekształcenia czasu, to istnieje taka transformacja RM, która nie narusza ich postaci. W szczególnym przypadku dwóch układów inercjalnych, których osie x są równoległe do wektora \mathbf{V} , taka transformacja ma postać

$$x = \frac{x' + \mathcal{V}t'}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}}, \quad (8.3)$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = \frac{t' + \mathcal{V} \cdot x'/c^2}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}}, \quad (8.4)$$

gdzie \mathcal{V} jest współrzędną x wektora $\mathbf{V} = (\mathcal{V}, 0, 0)$. Równania (8.3) – (8.4) noszą nazwę **transformacji Lorentza**. Zawarta w nich treść fizyczna została rozszyfrowana przez Einsteina w postaci **szczególnej teorii względności**.

8.3 Postulaty szczególnej teorii względności

Szczególną teorię względności można streścić w formie trzech postulatów:

- Podstawowe prawa fizyki zachowują swoją postać (są współzmiennicze) we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, inaczej – mają charakter absolutny.
- Prędkość rozchodzenia się światła w próżni c jest wielkością absolutną.
- Dla $v \ll c$ prawa mechaniki relatywistycznej przechodzą w prawa mechaniki klasycznej.

Pierwszy postulat zachowuje *zasadę względności* zastępując transformację Galileusza transformacją Lorentza jako stosownym przekształceniem współrzędnych i czasu przy przechodzeniu z jednego układu inercjalnego do drugiego. W ten sposób *usunięte zostało założenie o czasie absolutnym*. Równania Maxwella są zgodne z tak rozumianą zasadą względności. Tym samym elektrodynamika klasyczna okazała się zgodna ze szczególną teorią względności i nie wymaga żadnych relatywistycznych poprawek. Poprawianie fizyki ogranicza się tylko do mechaniki klasycznej. Stąd w trzecim postulacie jest mowa wyłącznie o mechanice.

8.4 Czasoprzestrzeń

Transformacja Lorentza dotyczy trzech współrzędnych wektora $\mathbf{r} = (x, y, z)$ oraz czasu t . Przestrzeń trójwymiarowa, jako przestrzeń fizyczna, wydaje się tu mniej odpowiednia niż przestrzeń czterowymiarowa.

Podstawową cechą przestrzeni jest możliwość wprowadzenia pojęcia odległości ds w postaci

$$(ds)^2 = g_{ij}dq^i dq^j, \quad (8.5)$$

gdzie macierz g_{ij} jest pewną macierzą symetryczną. Do powtarzających się wskaźników została zastosowana konwencja sumacyjna. Zakres zmian i oraz j nie jest tu szczególnie ważny. W przypadku trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej $g_{ij} = \delta_{ij}$ dla układu współrzędnych kartezjańskich. We współrzędnych sferycznych, gdy $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, mamy $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$, a wszystkie pozadiagonalne elementy g_{ij} są równe zero. Z równania fali elektromagnetycznej wynika naturalny kandydat na wielkość (8.5) dla czasoprzestrzeni

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (8.6)$$

Różne od zera pozostają tylko elementy diagonalne macierzy g_{ij} . Przestrzeń czterowymiarowa o takiej metryce jest bliska przestrzeni euklidesowej. Dlatego zwykle nazywa się ją przestrzenią *pseudoeuklidesową*. Współrzędna czasowa ct jest w niej wyróżniona względem

współrzędnych przestrzennych. Zamiast wskaźników alfabetu łacińskiego przyjęto wykorzystywać litery greckie w zakresie od 0 do 3, przy czym wartość zero jest zarezerwowana dla czasu:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu, \quad (\mu, \nu) = 0, 1, 2, 3$$

gdzie

$$q^0 = ct, \quad q^1 = x, \quad q^2 = y, \quad q^3 = z,$$

natomiast

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,$$

a pozostałe pozadiagonalne elementy macierzy $g_{\mu\nu}$ są równe zero. Ze względu na różne od jedności wartość współczynników $g_{\mu\mu}$ musimy odróżniać współrzędne z górnym wskaźnikiem q^μ (kontrawariantne) od współrzędnych kowariantnych q_μ , które dla $\mu = 0$ są sobie równe, a dla $\mu = 1, 2, 3$ różnią się znakiem

$$q_1 = -x, \quad q_2 = -y, \quad q_3 = -z.$$

Przestrzeń czterowymiarową o powyższych właściwościach nazywać będziemy *czasoprzestrzenią*.

Transformacja Lorentza jest szczególnym przypadkiem transformacji obrotu w czasoprzestrzeni

$$\begin{aligned} x &= x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi, \\ ct &= x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi, \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned} \tag{8.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \cosh \psi &= \frac{1}{2} (e^\psi + e^{-\psi}), \\ \sinh \psi &= \frac{1}{2} (e^\psi - e^{-\psi}). \end{aligned}$$

Obliczenie $ct^2 - x^2$ pokazuje, że

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2,$$

ponieważ

$$\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1.$$

Ogólnie wielkość ds nazywa się *interwałem czasoprzestrzennym* (skrótowo *interwałem*). Nie ulega on zmianie pod wpływem transformacji (8.7)

$$(ds)^2 = (ds')^2.$$

Początek układu współrzędnych K' w układzie K' ma oczywiście współrzędną $x' = 0$. W układzie K w chwili t ten sam początek układu K' ma współrzędne

$$x = ct' \sinh \psi, \quad ct = ct' \cosh \psi$$

(pozostałe współrzędne nie ulegają zmianie), skąd prędkość początku układu K' w układzie K

$$\mathcal{V} = \frac{x}{t} = c \operatorname{tgh} \psi \rightarrow \operatorname{tgh} \psi = \frac{\mathcal{V}}{c}.$$

Wykorzystując własności funkcji hiperbolicznych

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tgh}^2 \psi &= 1 / \cosh^2 \psi, \\ 1 / \operatorname{tgh}^2 \psi - 1 &= 1 / \sinh^2 \psi, \end{aligned}$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} \cosh^2 \psi &= 1 / \left(1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}\right), \\ \sinh^2 \psi &= \left(\frac{\mathcal{V}}{c}\right)^2 / \left(1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Po podstawieniu (8.8) do (8.7) otrzymuje się transformację Lorentza

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + \mathcal{V}t'}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}}, \\ t &= \frac{t' + \mathcal{V}x'/c^2}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}} \end{aligned}$$

jako szczególny obrót o kąt $\alpha = \psi/i$ w czasoprzestrzeni (współrzędne y i z nie ulegają zmianie i dlatego zostały pominięte).

W kinematyce nierelatywistycznej odległości przestrzenne i przedział y czasowe nie ulegały zmianie. Obecnie rola ta przypada inerwałowi. Punkt w czasoprzestrzeni (ct, x, y, z) nazywać będziemy zdarzeniem. Interwał Δs_{21} pary zdarzeń (ct_1, x_1, y_1, z_1) i (ct_2, x_2, y_2, z_2) jest określony przez

$$(\Delta s_{21})^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \tag{8.9}$$

Tej samej parze zdarzeń obserwowanej z różnych inercjalnych układów odniesienia może być przypisana różna wartość przedziału czasowego ($t_2 - t_1$) oraz różna odległość przestrzenna. Pierwszy efekt kinematyczny nazywa się *dylatacją* (wydłużeniem) *czasu*

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}},$$

drugi skróceniem długości

$$l = L\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}.$$

Czas τ nazywa się czasem własnym, a L długością spoczynkową. Tym co się nie zmienia przy zmianie układu inercjalnego jest interwał pary zdarzeń (8.9). Wielkości, które nie ulegają zmianie przy transformacji Lorentza nazywają się *niezmiennikami* relatywistycznymi albo *wielkościami absolutnymi*.

Inną konsekwencją zastąpienia transformacji Galileusza przez transformację Lorentza jest zmienione prawo dodawania prędkości. Dla kierunku $\hat{\mathbf{x}}$ dostaje się

$$v_x = \frac{v'_x + \mathcal{V}}{1 + \mathcal{V}v'_x/c^2}.$$

W szczególnym przypadku $v'_x = c$ otrzymuje się $v_x = c$, zgodnie z doświadczeniem, zamiast błędnego wyniku nierelatywistycznego $v_x = c + \mathcal{V}$.

8.5 Czterowektory

Zdarzenie (ct, x, y, z) może być przykładem wektora w czasoprzestrzeni. W odróżnieniu od zwykłych wektorów

$$\mathbb{X} = (ct, x, y, z)$$

nazywać będziemy *czterowektorem*. Kwadrat modułu czterowektora

$$\mathbb{A} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

określa się następująco

$$\mathbb{A}^2 = A_\mu A^\mu,$$

gdzie

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu,$$

przy czym

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{dla } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{dla } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Po rozpisaniu na składowe kontrawariantne

$$\Delta^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

8.6 Stożek świetlny i linia świata

Teraźniejszość w układzie K oznacza $t = \text{const}$. Zdarzenia jednoczesne leżą na prostej jednoczesności, jeśli ograniczymy się do podprzestrzeni zawierającej tylko oś x i ct . W układzie K' te same zdarzenia (jednoczesne w układzie K) rozłożą się na prostej, która wynika z transformacji Lorentza dla czasu

$$\text{const} = \frac{t' + \mathcal{V}x'/c^2}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}}.$$

W układzie K' jest to linia prosta nachylona względem osi x' . Jej współczynnik kierunkowy wynosi $\pm |\mathcal{V}|/c$ w zależności od znaku prędkości \mathcal{V} . Tak więc zdarzenia jednoczesne w układzie K będą odpowiadać różnym czasom w układzie K' . Zamiast płaszczyzny teraźniejszości szczególna teoria względności prowadzi do pewnego obszaru “teraźniejszości” w czasoprzestrzeni. Przydatne tu jest pojęcie interwału pary zdarzeń, ponieważ jest to wielkość absolutna. Jeśli jedno zdarzenie ulokujemy w początku układu współrzędnych, to

$$(\Delta s)^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

może być dodatnie, ujemne lub równe zero. Jeśli $(\Delta s)^2 > 0$, mówimy o interwale typu czasowego. Takie zdarzenia nigdy nie będą widziane jako jednoczesne. Jeśli $(\Delta s)^2 < 0$, to istnieją układy odniesienia z punktu widzenia, których oba zdarzenia będą jednoczesne. Zdarzenia dla których $(\Delta s)^2 = 0$ dotyczą propagacji światła. Równanie

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{8.10}$$

określa powierzchnię stożkową z wierzchołkiem w początku układu współrzędnych czasoprzestrzennych. Dzieli ona czasoprzestrzeń na trzy obszary. W dolnym stożku znajdują się zdarzenia wcześniejsze, czyli przeszłość względem zdarzenia centralnego $(0, 0, 0, 0)$. W górnym stożku czasoprzestrzeni ulokowane są zdarzenia, które są przyszłością dla zdarzenia centralnego. Pozostała część czasoprzestrzeni (na zewnątrz stożków) – to teraźniejszość. Podział ten ma charakter absolutny. Zmiana układu inercjalnego może zmienić relacje czasowe między zdarzeniem centralnym a zdarzeniami na zewnątrz stożków. Tam ulokowane

zdarzenia, zachodzące w różnych chwilach czasu względem zdarzenia centralnego, mogą być obserwowane jako jednoczesne w jakimś szczególnym układzie inercyjnym. Dla zdarzeń ulokowanych w stożku przeszłości lub w stożku przyszłości względem zdarzenia centralnego taki efekt relatywistyczny nigdy się nie pojawi się w żadnym układzie inercyjnym. Takie zdarzenia zawsze będą widziane w tej samej kolejności czasowej. Stożek wynikający z równań (8.10) stanowi wygodną konstrukcję podziału czasoprzestrzeni na przeszłość, teraźniejszość i przyszłość w sensie absolutnym. Nazywa się go *stożkiem świetlnym*.

Ciąg zdarzeń powiązanych przyczynowo np. zbiór punktów czasoprzestrzeni odpowiadających temu samemu obiektowi w różnych chwilach czasu) nazywa się *linią świata*. Dla każdego zdarzenia z linii świata można narysować stożek świetlny. Linia świata nigdzie nie może wykroczyć poza powierzchnię dolnego lub górnego stożka. Co najwyżej może być do niej styczna. Nie ma zatem więzi przyczynowej między zdarzeniami, z których jedno leży na zewnątrz stożka świetlnego drugiego zdarzenia.

8.7 Energia i pęd

Działanie dla cząstki swobodnej o masie m powinno mieć postać całki wzdłuż linii świata między dwoma zadanymi zdarzeniami \mathbb{R}_1 i \mathbb{R}_2

$$S = -mc \int_{\mathbb{R}_1}^{\mathbb{R}_2} ds.$$

Jest ona niezmiennikiem przekształceń Lorentza. Pod całką powinna występować różniczka w pierwszej potęgze. Jedynym skalarem tego rodzaju dla cząstki swobodnej jest interwał. Powód dla którego wprowadzono stałą mc stanie się jasny nieco później. Korzystamy z definicji

$$ds = \sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2},$$

skąd

$$ds = cdt \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

gdzie \mathbf{v} jest prędkością cząstki w układzie K . Porównując

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt$$

z ogólną definicją działania

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

znajdujemy relatywistyczną funkcję Lagrange'a cząstki swobodnej

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (8.11)$$

Rozwinięcie na szereg pierwiastka $\sqrt{1-x} \simeq 1 - x/2$ pozwala uzyskać funkcję Lagrange'a w granicy nierelatywistycznej

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Stały wyraz mc^2 można pominąć, gdyż nie ma on wpływu na równanie ruchu. Pęd cząstki dany jest przez pochodną funkcji Lagrange'a względem prędkości

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Różniczkując (8.11) otrzymujemy

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Zgodnie z ogólną definicją energia cząstki

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L.$$

Podstawiając \mathbf{p} i L do powyższego równania otrzymuje się

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Okazuje się, że energia cząstki swobodnej dla $\mathbf{v} = 0$ nie jest równa zeru: $E = mc^2$. Jest to energia spoczynkowa cząstki.

Na zakończenie warto zauważyć, że

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2.$$

Wnioskujemy stąd, że wielkość $(E/c, \mathbf{p})$ jest czterowektorem. Transformacja Lorentza dla jego składowych przyjmuje postać

$$p_x = \frac{p'_x + \mathcal{V}E'/c^2}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}},$$

$$E = \frac{E' + \mathcal{V}p'_x}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}/c)^2}},$$

$$p_y = p'_y,$$

$$p_z = p'_z.$$

Zerową składową nowego czterowektora (czteropędu) jest

$$p^0 = E/c.$$

Pozostałe składowe to

$$p^1 = p_x, \quad p^2 = p_y, \quad p^3 = p_z.$$

wszystkie razem spełniają relację

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2.$$

8.8 Czterowymiarowy potencjał pola

Jak można się domyślać V i \mathbf{A} tworzą razem czterowektor

$$(A^\mu) = (V/c, A_x, A_y, A_z).$$

Można teraz podjąć próbę zapostulowania następującej funkcji działania dla cząstki posiadającej ładunek elektryczny q

$$S = \int_{\mathbb{R}_1}^{\mathbb{R}_2} (-mcds - qA_\mu dx^\mu).$$

Ruch odbywa się po linii świata od punktu \mathbb{R}_1 do punktu \mathbb{R}_2 . Przyjmujemy następujące oznaczenie dla wektora wodzącego w czasoprzestrzeni

$$(x^\mu) = (ct, x, y, z)$$

i jego różniczki

$$(dx^\mu) = (cdt, dx, dy, dz).$$

Do przekształceń całki działania wygodniej jest posłużyć się zapisem

$$(x^\mu) = (ct, \mathbf{r})$$

oraz

$$(A_\mu) = (V/c, -\mathbf{A}).$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} dt - q(V/c, -\mathbf{A})(cdt, d\mathbf{r}) \right] \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} dt + q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - qV dt \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - qV \right) dt.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie pod całką jest funkcją Lagrange'a

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - qV.$$

Można obliczyć pęd uogólniony przyporządkowany prędkości. Zgodnie z ogólną regułą

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}.$$

Składając trzy wyrażenia

$$P_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + qA_i$$

otrzymamy

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + q\mathbf{A}.$$

Funkcję Hamiltona, określającą energię całkowitą, uzyskuje się z relacji

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L.$$

Proste przekształcenia dają

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \\
 &\quad + mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + qV,
 \end{aligned}$$

skąd

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + qV.$$

Funkcja Hamiltona powinna być wyrażona nie przez prędkość lecz pęd uogólniony. Z otrzymanych równań dla pędu relatywistycznego

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - q\mathbf{A}$$

oraz energii całkowitej

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = H - qV,$$

po podstawieniu do poznanej relacji $(E/c)^2 = m^2c^2 + p^2$ otrzymuje się

$$\left(\frac{H - qV}{c}\right)^2 = m^2c^2 + (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2.$$

8.9 Relatywistyczne równanie ruchu cząstki naładowanej w polu EM

Wykorzystamy zapostulowaną funkcję Lagrange'a do znalezienia równań ruchu. W tym celu zapiszemy równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

w postaci

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \nabla L.$$

Po podstawieniu otrzymuje się

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + q \frac{d\mathbf{A}}{dt} = q \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q \nabla V. \quad (8.12)$$

Ponieważ \mathbf{v} w funkcji Lagrange'a jest niezależne od \mathbf{r} , więc znana relacja dla gradientu z iloczynu skalarnego wektorów redukuje się do postaci zawierającej dwa wyrazy

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + q \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Ponadto należy zauważyć, że

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}.$$

To już wystarcza, aby przekształcić (8.12) do następującej postaci

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

gdzie $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla V$, a $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Uzyskany wynik potwierdza prawidłowość przyjętej całki działania.

8.10 Tensor pola elektromagnetycznego

Można łatwo przekonać się, że wszystkie składowe pól \mathbf{E} i \mathbf{B} są zawarte w tensorze

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

jako jego składowe. Tensor $F_{\mu\nu}$ jest antysymetryczny

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Oznacza to, że $F_{\mu\mu} = 0$ dla wszystkich μ . Obliczmy dla przykładu dwa wyrazy:

$$\begin{aligned} F_{01} &= -\frac{\partial A_1}{\partial(ct)} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{c} E_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ &= -(\nabla \times \mathbf{A})_z \\ &= -B_z. \end{aligned}$$

Należy pamiętać, że $(x^\mu) = (ct, \mathbf{r})$ oraz $(A_\mu) = (V/c, -\mathbf{A})$. W ten sposób dochodzi się do pozostałych składowych tensora. Ostatecznie otrzymamy

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor o współrzędnych z górnymi indeksami

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu},$$

można odtworzyć porównując $(x_\mu) = (ct, -\mathbf{r})$ oraz $(A^\mu) = (V/c, \mathbf{A})$ z (x^μ) oraz (A_μ) . Na przykład $x_0 = x^0$ i $A_0 = A^0$, natomiast $x_i = -x^i$ oraz $A_i = -A^i$ dla $i = 1, 2, 3$. Stąd wnioskujemy, że

$$F^{0i} = -F_{0i}, \quad F^{i0} = -F_{i0}.$$

Pozostałe wyrazy nie zmieniają znaku. Zatem

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Jako ćwiczenie warto sprawdzić, że równanie ruchu cząstki o masie m i ładunku q można zapisać, przy zastosowaniu konwencji sumowania, jako

$$\frac{dp^\mu}{ds} = qF^{\mu\nu}u_\nu,$$

gdzie

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{ds}$$

jest relatywistycznym odpowiednikiem wektora prędkości. Czerowektor

$$p^\mu = mcu^\mu = (E/c, \mathbf{p})$$

jest wcześniej wprowadzonym czteropędem. Różniczkowanie po interwale można zastąpić różniczkowaniem po czasie. W układzie związanym z poruszającą się cząstką $ds = cd\tau$; w innym układzie $ds = c\sqrt{1 - (v/c)^2}dt$, skąd

$$\frac{dx_\nu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{dx_\nu}{d(ct)}.$$

8.11 Transformacje pól \mathbf{E} i \mathbf{B} przy zmianie układu odniesienia

Postać równań ruchu jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Równania te zawierają skalary (które można nazwać tensorami rzędu zerowego), wektory (tensory pierwszego rzędu) i tensory (drugiego rzędu) w czterowymiarowej przestrzeni (czasoprzestrzeni).

Jest teraz odpowiedni moment, aby precyzyjnie zdefiniować wektory i tensory. Dowolną transformację zmiany współrzędnych można zapisać w postaci układu funkcji. W przypadku transformacji Lorentza będzie to

$$x^\mu = x^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3).$$

Utwórzmy różniczkę

$$dx^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) dx'^\nu.$$

Wektorami nazywa się wielkości, które transformują się jak różniczki dx^μ przy zmianie współrzędnych x na x'

$$A^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) A'^\nu.$$

Tensory transformują się jak iloczyny różniczek

$$A^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta} \right) A'^{\gamma\delta}. \quad (8.13)$$

Wygodniej będzie przedstawić transformację Lorentza w następującej postaci

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \\ \text{(ii)} \quad & x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0), \\ \text{(iii)} \quad & x^2 = x'^2, \\ \text{(iv)} \quad & x^3 = x'^3, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned} \beta &= v/c, \\ \gamma &= 1/\sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Macierz współczynników $\partial x^\mu/\partial x'^\nu$ ma postać

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

Te sześć różnych od zera wyrazów wystarcza do wyznaczenia $F^{\mu\nu}$, jeśli znamy $F'^{\mu\nu}$. Sześć niezależnych współrzędnych tensora ($F^{\mu\nu}$) można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej grupy wchodzi dwie współrzędne

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & F^{01} = F'^{01}, \\ \text{(ii)} \quad & F^{23} = F'^{23}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy (i) przez podstawienie (8.14) do (8.13)

$$\begin{aligned} F^{01} &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^\nu} \right) F'^{\mu\nu} \\ &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^1} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0} \right) F'^{10} + \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right) \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \right) F'^{01} \\ &= \gamma^2 \beta^2 F'^{10} + \gamma^2 F'^{01} = \gamma^2 (1 - \beta^2) F'^{01} = F'^{01}. \end{aligned}$$

Do drugiej grupy wchodzi cztery pozostałe składowe, które transformują się jak wektory. Można to zademonstrować na przykładzie F^{02} :

$$\begin{aligned} F^{02} &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\frac{\partial x^2}{\partial x'^{\nu}} \right) F'^{\mu\nu} \\ &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu}} \right) \delta_{\nu,2} F'^{\mu\nu} \\ &= \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu}} \right) F'^{\mu 2}. \end{aligned}$$

Składowe F^{02} i F^{12} transformują się tak, jak by były składowymi wektora, podobnie jak F^{03} i F^{13}

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad F^{02} &= \gamma (F'^{02} + \beta F'^{12}), \\ \text{(ii)} \quad F^{12} &= \gamma (F'^{12} + \beta F'^{02}), \\ \text{(iii)} \quad F^{03} &= \gamma (F'^{03} + \beta F'^{13}), \\ \text{(iv)} \quad F^{13} &= \gamma (F'^{13} + \beta F'^{03}). \end{aligned}$$

Relacje (i)-(iv) w języku pól elektrycznych i magnetycznych mają postać

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E_x &= E'_x, \\ \text{(ii)} \quad E_y &= \gamma (E'_y + \mathcal{V} B'_z), \\ \text{(iii)} \quad E_z &= \gamma (E'_z - \mathcal{V} B'_y), \end{aligned} \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad B_x &= B'_x, \\ \text{(v)} \quad B_y &= \gamma \left[B'_y - (\mathcal{V}/c^2) E'_z \right], \\ \text{(vi)} \quad B_z &= \gamma \left[B'_z + (\mathcal{V}/c^2) E'_y \right], \end{aligned} \tag{8.16}$$

równoważną zapisowi wektorowemu przy założeniu $\mathbf{V} = (\mathcal{V}, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}'_{\parallel}, \\ \text{(ii)} \quad \mathbf{E}_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'), \\ \text{(iii)} \quad \mathbf{B}_{\parallel} &= \mathbf{B}'_{\parallel}, \\ \text{(iv)} \quad \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma (\mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{E}'/c^2)_{\perp}. \end{aligned}$$

Ostatnie zależności ujawniają względny charakter pola \mathbf{E} i \mathbf{B} . Tylko tensor $(F^{\mu\nu})$ jest wielkością współmienniczą z której można tworzyć wielkości absolutne.

8.12 Niezmienniki pola elektromagnetycznego

Obecnie możemy sprawdzić przez podstawienie, że

$$c^2 B^2 - E^2 = c^2 B'^2 - E'^2,$$

czyli jest to niezmiennik transformacji Lorentza (wielkość absolutna). Istnieje też prostszy sposób. Wystarczy nałożyć na siebie macierze $(F_{\mu\nu})$ i $(F^{\mu\nu})$. Tak utworzony iloczyn składowych kowariantnych i kontrawariantnych tego tensora jest skalarem z ogólnego powodu

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \text{const.}$$

Z drugiej strony widać, że

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2/c^2).$$

Tak, czy inaczej, dostaje się

$$c^2B^2 - E^2 = \text{const.}$$

Innym przykładem niezmiennika jest iloczyn

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{const.}$$

W tym ostatnim przypadku wymagany jest komentarz. Pole \mathbf{E} opisywane jest wektorem biegunowym, a pole \mathbf{B} wektorem osiowym. Iloczyn wektora biegunowego i osiowego jest pseudoskalarem, to znaczy zmienia znak przy jednoczesnej zmianie znaku współrzędnych x , y i z . Prawdziwym skalarem będzie $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$.

Można wyróżnić trzy przypadki

- (i) $c^2B^2 - E^2 > 0$,
- (ii) $c^2B^2 - E^2 < 0$,
- (iii) $c^2B^2 - E^2 = 0$.

W przypadku (i) mówimy, że pole jest **czysto magnetyczne**, gdyż istnieje taki układ odniesienia K' w którym pole $\mathbf{E} = 0$. W przypadku (ii) mówimy, że pole jest **czysto elektryczne** z podobnego powodu. Jeśli w jakimś układzie K' pojawi się pole \mathbf{B} , to będzie ono prostopadłe do pola \mathbf{E} , czyli $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Wyjątkowy jest przypadek (iii), gdy $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Wtedy w każdym układzie odniesienia $c|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$ oraz $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Jest to przypadek fali elektromagnetycznej.

Podsumowując powyższe spostrzeżenia można powiedzieć, że pole elektryczne w jednym układzie odniesienia może stać się (częściowo) polem magnetycznym w innym układzie odniesienia. Jeśli mamy elektrostatykę i teorię względności, to musi istnieć magnetyzm jako efekt relatywistyczny.

8.13 Działanie dla pola elektromagnetycznego

Można próbować utworzyć brakujący człon w funkcji działania, pochodzący od pola elektromagnetycznego. Pełna funkcja działania składać się będzie z trzech członów

$$S = S_m + S_{mf} + S_f,$$

gdzie

$$S_m = - \sum mc \int ds$$

$$S_{mf} = - \sum q \int A_\mu dx^\mu$$

$$S_f = -a \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3r dt$$

$$a = \varepsilon_0 c^2 / 4$$

Pierwszą parę równań Maxwella otrzymuje się z wprowadzonego czteropotencjału

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

gdź automatycznie

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Drugą parę równań Maxwella uzyskamy w oparciu o zasadę najmniejszego działania dla

$$S_1 = S_{mf} + S_f$$

jako warunek na $\delta S_1 = 0$. Ruch ładunków przyjmuje się za zadany, a wariacjom poddawane są składowe A_μ potencjałów pola. W działaniu

$$S_f = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \int \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) d\Omega$$

różniczka $d\Omega = d^3r dt$ jako element objętości czasoprzestrzeni jest niezmiennikiem relatywistycznym (skrócenie długości jest kompensowane wydłużeniem czasu). Funkcja Lagrange'a dla pola elektromagnetycznego ma postać

$$L_f = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \int \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) d^3r.$$

8.14 Pole ładunku poruszającego się ruchem jednostajnym

Wybermy tak układ współrzędnych K , aby ładunek q poruszał się z prędkością v wzdłuż osi x . Następnie wprowadzamy układ współrzędnych K' , w którego początku będzie znajdował się nieruchomy ładunek q . Układ K' będzie wobec tego poruszał się z prędkością

$\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ względem układu K . Oba układy będą związane ze sobą transformacją Lorentza o współczynnikach

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= 1 / \left(1 - v^2 / c^2\right) \\ 1 / \gamma^2 &= 1 - \beta^2.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$R^2 \sin^2 \theta = y^2 + z^2$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{v}t \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t,\end{aligned}$$

Najpierw zajmiemy się polem \mathbf{E} w układzie K . Dla $\mathbf{B}' = 0$ z transformacji Lorentza dla pól dostajemy

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma E'_y, \quad E_z = \gamma E'_z.$$

Ponieważ znamy

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3},$$

zatem

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad E_y = \gamma \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{y'}{r'^3}, \quad E_z = \gamma \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{z'}{r'^3}$$

Odwrotna TL dla wektorów \mathbf{r} i \mathbf{r}' ma postać

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z.\end{aligned}$$

Stąd łatwa droga do pozbycia się zmiennych primowanych w wyrażeniach na składowe pola \mathbf{E} . Wystarczy obliczyć

$$(r')^2 = \gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2.$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$(R^*)^2 = (x - vt)^2 + (y^2 + z^2) / \gamma^2.$$

Wtedy

$$(r')^2 = \gamma^2 (R^*)^2,$$

natężenie pola elektrycznego w układzie K przyjmie postać

$$\begin{aligned} E_x &= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\gamma(x-vt)}{\gamma^3 (R^*)^3}, \\ E_y &= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\gamma y}{\gamma^3 (R^*)^3}, \\ E_z &= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\gamma z}{\gamma^3 (R^*)^3} \end{aligned}$$

lub

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3} (1 - \beta^2). \quad (8.17)$$

Jak już zauważyliśmy, \mathbf{R} jest wektorem, którego początek pokrywa się z położeniem ładunku q a koniec z punktem, w którym badamy pole \mathbf{E} . Wszystko dzieje się w układzie K , względem którego ładunek porusza się z prędkością \mathbf{v} . Porównując

$$R^2 = (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)$$

z

$$R^2 \sin^2 \theta = y^2 + z^2$$

otrzymuje się

$$R^2 \cos^2 \theta = (x - vt)^2.$$

Po podstawieniu ostatniego wyniku do wyrażenia na

$$(R^*)^2 = (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)/\gamma^2$$

uzyskamy

$$\begin{aligned} (R^*)^2 &= R^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\gamma^2} R^2 \sin^2 \theta \\ &= R^2 \left[\cos^2 \theta + (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \right] \\ &= R^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Możemy teraz doprowadzić wzór (8.17) na natężenie pola elektrycznego ładunku punkto-
wego poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym do postaci

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (8.18)$$

Rozkład na składową równoległą i prostopadłą względem kierunku prędkości \mathbf{v} pozwala stwierdzić, że

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (1 - \beta^2)$$

jest mniejsze niż

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Oznacza to, że pole ładunku punktowego ulega deformacji (spłaszczeniu) w kierunku ruchu, podobnie jak okładki kondensatora ulegają skróceniu, jeśli są ustawione wzdłuż kierunku przemieszczania się.

Z transformacji Lorentza (8.16) można wywnioskować, co się dzieje z polem \mathbf{B}

$$\begin{aligned} B_x &= 0, \\ B_y &= -\gamma \frac{\beta}{c} E'_z = -\frac{\beta}{c} E_z, \\ B_z &= \gamma \frac{\beta}{c} E'_y = \frac{\beta}{c} E_y. \end{aligned}$$

Po rozłożeniu na składową równoległą i prostopadłą względem wektora prędkości $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ uzyskujemy

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp},$$

skąd

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}),$$

gdzie \mathbf{E} jest określone wyrażeniem (8.18). Dla małych prędkości ($\beta \ll 1$)

$$\mathbf{E} \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

skąd

$$\mathbf{B} \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{R})}{R^3}.$$

Dość niezwykle dochodzimy do prawa Biota-Savarta dla ładunku punktowego (3.1), które jest tu spełnione z dobrym przybliżeniem mimo, że problem nie jest magnetostatyczny.

8.15 Potencjały Liénarda-Wiecherta

Wyznamy potencjały pola wytworzonego przez ładunek punktowy, wykonujący z góry zadany ruch $\mathbf{w}(t)$. Niech

$$\vec{\mathcal{R}}(t_r) = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$$

będzie wektorem wodzącym poprowadzonym od ładunku punktowego q do punktu obserwacji. Poprzez $\mathbf{w}(t_r)$ wektor ten jest zależny od czasu t . Zgodnie z koniecznością wcześniejszego określenia stanu ładunku czas opóźniony jest dany w sposób uwikłany przez relację

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r)$$

czyli

$$\mathcal{R}(t_r) = c(t - t_r).$$

W układzie współrzędnych w którym cząstka spoczywa potencjał skalarny w punkcie obserwacji w chwili t jest określony zgodnie z prawem Coulomba

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mathcal{R}(t_r)}$$

przy $\mathbf{A} = 0$. Wyrażenia na potencjały w dowolnym układzie odniesienia będą wyznaczone przez taki czterowektor, który dla prędkości $\mathbf{v} = 0$ będzie przechodził w powyższe potencjały. Zważmy, że potencjał V można zapisać jako

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c(t - t_r)}.$$

Można następnie stwierdzić, że

$$cA^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{u^\mu}{\mathcal{R}_\nu u^\nu} \tag{8.19}$$

gdzie (u^ν) jest czteroprędkością ładunku, a

$$(\mathcal{R}^\nu) = (c(t - t_r), \mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

czterowektorem, przy czym t_r, x', y', z' spełniają relację

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = c(t - t_r),$$

którą można zapisać jako

$$\mathcal{R}_\nu \mathcal{R}^\nu = 0.$$

Przechodząc ze wzorem (8.19) do zapisu trójwymiarowego dostajemy

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{v})}, \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{(\mathcal{R}c - \vec{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Prędkość \mathbf{v} jest wzięta w czasie opóźnionym. Wektor $\vec{\mathcal{R}}$ jest wektorem między położeniem opóźnionym ładunku a punktem obserwacji pola \mathbf{r} . Otrzymane potencjały noszą nazwę potencjałów Liénarda-Wiecherta. Można przy ich pomocy obliczyć natężenie pola elektrycznego \mathbf{E} i indukcji pola magnetycznego \mathbf{B} ładunku punktowego poruszającego się po dowolnym torze.

Różniczkowanie potencjałów (8.20) jest dość trudne ze względu na

$$\vec{\mathcal{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \quad \text{i} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}}(t_r),$$

które są obliczane w czasie opóźnionym t_r . Czas ten jest zdefiniowany w sposób uwikłany przez równania

$$\mathcal{R} = c(t - t_r)$$

$$\mathcal{R} = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|$$

i poprzez zmienne \mathbf{r} i t . Pomijamy rachunki, które prowadzą do wzoru

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{R}}{(\vec{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \vec{\mathcal{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right], \quad (8.21)$$

gdzie

$$\mathbf{u} = c\hat{\mathcal{R}} - \mathbf{v}$$

natomiast $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ jest oznaczeniem przyspieszenia cząstki w czasie opóźnionym. Tymczasem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathcal{R}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Indukcja pola magnetycznego ładunku punktowego jest zawsze prostopadła do natężenia pola elektrycznego i do wektora położenia względem punktu opóźnionego.

Pierwszy człon w wyrażeniu (8.21) maleje jak $1/\mathcal{R}^2$. W przypadku, gdy prędkość i przyspieszenie są równe zero otrzymujemy pole

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}},$$

jak dla nieuchomego ładunku punktowego i z tego powodu nazywamy je *uogólnionym polem kulombowskim*, czasami *polem prędkościowym*.

Drugi człon maleje jak odwrotność pierwszej potęgi \mathcal{R} . Zatem dominuje przy dużych odległościach. Człon ten zawiera przyspieszenie i odpowiada za promieniowanie elektromagnetyczne, dlatego nazywa się go *połem promieniowania* lub *połem przyspieszeniowym*. Tę samą terminologię rozszerza się na pole magnetyczne.

Można teraz odpowiedzieć na pytanie o siłę wywieraną na ładunek próbny Q przez dowolny rozkład innych ładunków. Wystarczy znać siłę działającą na Q ze strony innego ładunku q . Resztę rozwiązuje zasada superpozycji. Siłę tę wyznaczamy ze wzoru Lorentza posługując się wyrażeniem (8.21) na pola:

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{R}}{(\vec{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{u})^3} + \left\{ \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \vec{\mathcal{R}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left[\vec{\mathcal{R}} \times \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \vec{\mathcal{R}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \right] \right] \right\},$$

gdzie \mathbf{V} jest prędkością ładunku Q a $\vec{\mathcal{R}}$, \mathbf{u} , \mathbf{v} i \mathbf{a} są podane w czasie opóźnionym. Wzór ten zawiera całą elektrodynamikę.

8.16 Promieniowanie dipolowe

Będziemy zajmować się promieniowaniem wytworzonym przez układy poruszających się ładunków w dalekich od nich odległościach (tzn. dużo większych niż rozmiary układu). Nie mówiliśmy dotychczas, jak wytworzyć falę elektromagnetyczną. Wiemy już, że ładunki w spoczynku i stałe prądy nie wytwarzają fal. Domyślamy się więc, że ich źródłem są ładunki poruszające się z przyspieszeniem i prądy zmienne.

Raz wytworzone fale EM rozchodzą się w próżni “do niekończoności” przenosząc ze sobą energię. Oznaką promieniowania jest odpływ energii ze źródła. Wybieramy układ odniesienia w pobliżu źródeł. Całkowita moc przechodząca przez powierzchnię bardzo dużej sfery jest całką z wektora Poyntinga

$$P(r) = \oint \mathbf{S} d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\mathbf{S}.$$

Wypromieniowana moc, czyli energia przypadająca na jednostkę czasu, jest granicą wyrażenia

$$P_{\text{wyp}} = \lim_{r \rightarrow \infty} P(r).$$

Badanie promieniowania polega na wydzieleniu części pól \mathbf{E} i \mathbf{B} , które maleją jak $1/r$. Zwykle rozważa się najpierw drgający dipol elektryczny i magnetyczny, następnie promieniowanie ładunku punktowego w ruchu przyspieszonym i promieniowanie szybko poruszającego się ładunku. Promieniowanie fali EM powoduje straty energii, a więc hamowanie cząstki.

Rozważmy zmienny w czasie elektryczny moment dipolowy

$$\mathbf{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$$

z amplitudą $p_0 = q_0 d$, odpowiadający przepływowi ładunku

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

Potencjał opóźniony wynosi

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_0 \cos[\omega(t - \mathcal{R}_+/c)]}{\mathcal{R}_+} - \frac{q_0 \cos[\omega(t - \mathcal{R}_-/c)]}{\mathcal{R}_-} \right\},$$

gdzie

$$\mathcal{R}_\pm = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + (d/2)^2}.$$

Przyjmujemy

$$\boxed{\text{przybliżenie 1: } d \ll r.}$$

Stosujemy rozwinięcie \mathcal{R}_\pm oraz $1/\mathcal{R}_\pm$ w potencjale $V(\mathbf{r}, t)$ ograniczając się do wyrazów pierwszego rzędu względem d

$$\mathcal{R}_\pm \simeq r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right),$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_\pm} \simeq \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right),$$

co prowadzi do

$$\begin{aligned} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathcal{R}_\pm}{c} \right) \right] &\simeq \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \\ &= \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \mp \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Stosujemy

$$\boxed{\text{przybliżenie 2: } d \ll c/\omega}$$

równoważne $d \ll \lambda$. Wtedy

$$\cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathcal{R}_\pm}{c} \right) \right] \simeq \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

a potencjał V przyjmuje postać

$$V(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}.$$

W dużych odległościach od źródła dla $\omega \neq 0$ interesuje nas strefa promieniowania. Stosujemy

$$\boxed{\text{przybliżenie 3: } r \gg c/\omega}$$

równoważne $r \gg \lambda$. W tym obszarze potencjał redukuje się do postaci

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega \cos \theta}{c r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

Potencjał wektorowy jest określony przez prąd

$$\mathbf{I}(t) = \frac{dq}{dt} \hat{\mathbf{z}} = -q_0 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}.$$

Zgodnie z przyjętą geometrią

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0}{\mathcal{R}} \sin\left(\omega t - \frac{\mathcal{R}}{c}\right) \hat{\mathbf{z}} dz.$$

W pierwszym przybliżeniu funkcję podcałkową można zastąpić jej wartością w środku dipola

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)\right] \hat{\mathbf{z}}.$$

Można teraz przystąpić do obliczenia pól. Zgodnie z przybliżeniem 3

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\simeq \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos\left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)\right] \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos\left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)\right] (\mathbf{r} \cos \theta - \theta \sin \theta).$$

Równocześnie

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos\left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)\right] + \frac{\sin \theta}{r} \sin\left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)\right] \right\} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned}$$

Ostatni człon w tym równaniu jest wyeliminowany przez przybliżenie 3. Dla pól otrzymuje się

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos\left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)\right] \theta,$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\varphi}.$$

Uzyskane wzory przedstawiają falę monochromatyczną o częstotliwości ω rozchodzącą się w kierunku promienia \mathbf{r} z prędkością światła. Oba pola posiadają tę samą fazę i są wzajemnie prostopadłe, a stosunek ich amplitud wynosi $E_0/B_0 = c$.

Energia wypromieniowana przez drgający dipol elektryczny wynosi

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\}^2 \hat{\mathbf{r}}.$$

Natężenie promieniowania dostaje się po uśrednieniu w czasie jednego okresu

$$\langle \mathbb{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Całkowitą moc promieniowania oblicza się przez scałkowanie $\langle \mathbb{S} \rangle$ po sferze o promieniu r

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbb{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}.$$

Otrzymany wynik nie zależy od promienia sfery.

Dodatek A

Relacje i twierdzenia

A.1 Relacje wektorowe

Poniżej ϕ i ψ są funkcjami skalarnymi, natomiast \mathbf{a} , \mathbf{b} i \mathbf{c} są wektorami

A.1.1 Iloczynny podwójny

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

A.1.2 Pochodne iloczynów

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \nabla\phi$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{a}) = \phi\nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla\phi$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a}$$

A.1.3 *Relacje z drugimi pochodnymi*

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) \equiv \nabla^2 \phi \equiv \Delta \phi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

A.2 Podstawowe twierdzenia

A.2.1 *Twierdzenie dla gradientów*

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla \phi) d\mathbf{l} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

A.2.2 *Twierdzenie Gaussa (dla dywergencji)*

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3r = \int_{S(V)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$$

A.2.3 *Twierdzenie Stokesa (dla rotacji)*

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C(S)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$$

A.3 Współrzędne kartezjańskie

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

$$d^3r = dx dy dz$$

A.3.1 *Gradient*

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

A.3.2 *Dywergencja*

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

A.3.3 Rotacja

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

A.3.4 Laplasjan

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

A.4 Współrzędne kuliste

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

$$d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

A.4.1 Wersory:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \theta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi. \end{aligned}$$

A.4.2 Gradient

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

A.4.3 Dywergencja

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

A.4.4 Rotacja

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$$

A.4.5 *Laplasjan*

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

A.5 Współrzędne walcowe

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz \hat{\mathbf{z}},$$

$$d^3r = r dr d\varphi dz.$$

A.5.1 *Gradient*

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

A.5.2 *Dywergencja*

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

A.5.3 *Rotacja*

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\varphi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

A.5.4 *Laplasjan*

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Dodatek B

Różne przekształcenia

B.1 Delta Diraca

Delta Diraca $\delta(x - x_0)$ nie jest funkcją w ogólnie przyjętym sensie matematycznym. Jest osobliwym tworem matematycznym: znika wszędzie za wyjątkiem punktu $x = x_0$. W punkcie tym osiąga tak dużą wartość, że całka po całym przedziale zawierającym osobliwość jest równa jedności

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (\text{B.1})$$

Podstawowa własność delty Diraca wyraża się wzorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (\text{B.2})$$

gdzie $f(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą. Z relacji (B.2) w szczególnym przypadku $f(x) = 1$ dostaje się (B.1).

Delta Diraca Niekiedy użyteczne są różne modele delty Diraca w postaci granicy ciągu funkcji analitycznych. Weźmy np. całkę

$$\int \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \arctg \frac{x}{\varepsilon}.$$

W nieskończonych granicach wynik całkowania

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \pi$$

nie zależy od wartości ε . Tak więc właściwie unormowana funkcja podcałkowa dla $\varepsilon \rightarrow 0$ może posłużyć za model delty Diraca

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad (\text{B.3})$$

gdyż dąży do zera dla wszystkich x za wyjątkiem $x = 0$, gdzie dąży do nieskończoności.

Można też wykorzystać całkę

$$\int_{-a}^a e^{\pm ikx} dk = 2a \frac{\sin(ax)}{ax}. \quad (\text{B.4})$$

W granicy $a \rightarrow \infty$ jej wartość wszędzie dąży do zera za wyjątkiem $x = 0$, gdzie ma pik dążący do nieskończoności. Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy = \pi$$

więc obustronne scałkowanie (B.4) ze względu na x w nieskończonych granicach daje wynik

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-a}^a e^{\pm ikx} dk \right] dx = 2\pi,$$

który również nie zależy od a . Tak więc po uwzględnieniu właściwego unormowania dostajemy

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{\pm ikx} dk \quad (\text{B.5})$$

oraz

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(ax)}{x}. \quad (\text{B.6})$$

Ze wzorów (B.3) i (B.5) widać, że

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (\text{B.7})$$

W przypadku całki z deltą Diraca zawierającą funkcję $y = g(x)$ można dokonać zamiany zmiennej całkowania podstawiając $dx = dy/|g'(x)|$. Osobliwości delty Diraca wystąpią dla poszczególnych biegunów x_i , wyznaczonych z równania $g(x) = 0$. Tym samym

$$\int f(x) \delta[g(x)] dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}. \quad (\text{B.8})$$

Można jeszcze rozszerzyć definicję delty Diraca na przypadek trzech zmiennych przestrzennych $(x, y, z) \Rightarrow \mathbf{r}$. Wtedy odpowiednikiem własności (B.2) jest

$$\int_{V_\infty} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d^3r = f(\mathbf{r}_0), \quad (\text{B.9})$$

co oznacza, że

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (\text{B.10})$$

jest rozumiana jako iloczyn trzech delt. Zgodnie z (B.5)

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (\text{B.11})$$

B.2 Transformacja Fouriera

Transformacją Fouriera funkcji $f(x)$ nazywać będziemy funkcję

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (\text{B.12})$$

Zauważmy, że możliwe są inne definicje, różniące się stałą lub znakiem w wykładniku funkcji eksponencjalnej. Jeśli daje się obliczyć całkę (B.12), to mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada transformatę Fouriera. Oczywiście, funkcja $\tilde{f}(k)$ ma na ogół inną postać niż $f(x)$, co zaznaczono kłaską. Mając ten fakt w pamięci rezygnujemy w dalszych przekształceniach z tego rozróżnienia dla zachowania prostoty zapisu. Jeśli istnieje $f(k)$, można znaleźć funkcję $f(x)$ przez odwrócenie relacji (B.12)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dx. \quad (\text{B.13})$$

Czynnik $1/2\pi$ wynika z dyskutowanego wcześniej obrazu funkcji delta Diraca. Tylko z tym czynnikiem podstawienie (B.12) do (B.13) daje

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dx \right] dy$$

a w oparciu o (B.5)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x - y) dy,$$

co dowodzi, zgodnie z własnością (B.2) delty Diraca, że transformacja Fouriera zastosowana dwukrotnie do funkcji $f(x)$ daje tę samą funkcję, jak być powinno.

Rozszerzenie transformacji Fouriera na trójwymiarową przestrzeń położeń ma postać relacji

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}) &= \int_{V_\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r, \\ f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_\infty} f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Można wreszcie w tej samej konwencji zdefiniować transformację Fouriera dla funkcji zależnej od zmiennych przestrzennych i czasu

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{V_\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3r dt, \\ f(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{V_\infty} f(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3k d\omega. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Jest to zapis niesymetryczny z powodu przerzucenia czynnika normującego $(2\pi)^{-4}$ do transformacji odwrotnej. Wybór znaków w wykładnikach funkcji eksponencjalnych jest dopasowany do konwencji stosowanej w mechanice kwantowej.

Warto zauważyć kilka istotnych własności transformat Fouriera

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \text{TF}[f(\mathbf{r}, t)].$$

Wynik (B.11) z punktu widzenia (B.14) można zapisać jako

$$e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} = \text{TF}[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]. \quad (\text{B.16})$$

Zróżniczkowanie drugiego wzoru (B.15) po czasie daje

$$\frac{df(r, t)}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{V_\infty} (-i\omega) f(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3k d\omega$$

skąd widać, że

$$-i\omega f(\mathbf{k}, \omega) = \text{TF} \left[\frac{df(r, t)}{dt} \right]. \quad (\text{B.17})$$

W analogiczny sposób dostaje się

$$i\mathbf{k}f(\mathbf{k}, \omega) = \text{TF} [\nabla f(r, t)], \quad (\text{B.18})$$

gdzie ∇ oznacza gradient. W zależności od potrzeb, uzyskanie podobnych relacji dla innych operatorów różniczkowych nie przedstawia trudności i może być wykorzystywane do rozwiązywania równań różniczkowych.

Ostatnia ważna własność TF jest związana ze splotem (konwolucją)

$$h(x) = \int f(x')g(x-x')dx' \quad (\text{B.19})$$

dwóch funkcji $f(x)$ i $g(x)$. Obliczmy $TF[h(x)] = h(k)$

$$h(k) = \iint f(x')g(x-x')e^{-ikx} dx' dx.$$

Zastępujemy całkowanie po x całkowaniem po $x'' = x - x'$

$$\begin{aligned} h(k) &= \iint f(x')g(x'')e^{-ik(x'+x'')} dx' dx'' \\ &= \int f(x')e^{-ikx'} dx' \int g(x'')e^{-ikx''} dx''. \end{aligned}$$

Dowiedliśmy zatem, że transformacja Fouriera splotu jest iloczynem transformat Fouriera funkcji wchodzących do splotu

$$TF[h(x)] = TF[f(x)] \times TF[g(x)]. \quad (\text{B.20})$$

Dodatek C

Uzupełnienia

C.1 Zależność przenikalności elektrycznej od częstości

Z poprzednich rozważań dowiedzieliśmy się, że rozchodzenie się fal EM zależy od trzech wielkości: przenikalności elektrycznej ε , magnetycznej μ oraz przewodności właściwej σ . Każda z tych trzech wielkości może zależeć od częstości fal. Pryzmat lub kropelka deszczu silniej załamuje światło niebieskie niż czerwone. Oznacza to zależność współczynnika załamania od długości fali (przeliczonej na długość fali w powietrzu), co przenosi się na zależność prędkości od długości fali (lub wektora falowego). Ośrodek taki nazywa się dyspersyjnym. Zależność

$$\omega = \omega(k)$$

odbiega wtedy od zwykłej zależności liniowej

$$\omega = vk.$$

Poza prędkością fazową

$$v = \frac{\omega}{k}$$

można wprowadzić prędkość

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

która nazywa się prędkością grupową. W ośrodku nieprzewodzącym elektrony są związane z poszczególnymi atomami. W obecności fali elektromagnetycznej o częstości ω spolaryzowanej w kierunku osi x na elektron działa siła wymuszająca

$$F_{wym} = qE = qE_0 \cos(\omega t),$$

gdzie q jest ładunkiem elektronu a E_0 jest amplitudą fali w punkcie z , w którym znajduje się elektron. Siły wiążące elektron z atomem przybliżamy potencjałem oscylatora harmonicznego

$$F_w = -m\omega_0^2 x$$

gdzie m jest masą elektronu, a ω_0 jest częstością drgań własnych ($m\omega_0^2$ jest współczynnikiem sprężystości oscylatora). Siła tłumiąca w najprostrzej postaci jest proporcjonalna do prędkości

$$F_t = -m\gamma \frac{dx}{dt}.$$

Wprowadzamy wszystkie te siły do drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_w + F_t + F_{wym},$$

skąd

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0 \cos(\omega t).$$

Jest to więc model tłumionego oscylatora z siłą wymuszającą o częstości ω . Ruch ciężkich jąder można uwzględnić zastępując masę elektronu m przez masę efektywną $\mu = mM/(m+M)$, gdzie M jest masą jądra. Dla $M \gg m$ mamy $\mu \simeq m$. Ostatnie równanie najwygodniej jest analizować w języku transformat Fouriera

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}.$$

W stanie ustalonym (stacjonarnym) układ będzie drgał z częstością siły wymuszającej, co sugeruje

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

jako możliwą postać rozwiązania. Po podstawieniu tej zależności do równania różniczkowego otrzymamy dla amplitudy \tilde{x}_0 następującą relację

$$\tilde{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0.$$

Transformatę Fouriera powstającego elektrycznego momentu dipolowego otrzymamy z wyrażenia

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}.$$

Urojony wyraz w mianowniku informuje, że moment dipolowy p jest przesunięty o kąt $\arctg[\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$ względem pola elektrycznego fali. Kąt ten jest mały dla niskich częstości $\omega \ll \omega_0$ i rośnie do π , gdy ω przybliży się do ω_0 .

Dla cząsteczek wieloelektronowych przedstawiony model prowadzi do następującego wyniku

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{Nq^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}}$$

dla transformat Fouriera polaryzacji $\tilde{\mathbf{p}}$ i pola elektrycznego $\tilde{\mathbf{E}}$. Przez N oznaczono liczbę cząsteczek w jednostce objętości. Każda cząsteczka posiada f_j elektronów o częstościach drgań własnych ω_j i tłumieniu γ_j . Dla ośrodków liniowych transformaty Fouriera spełniają relację

$$\tilde{\mathbf{p}} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{\mathbf{E}},$$

będącą odpowiednikiem $p = \varepsilon_0 \chi_e E$. Proporcjonalność między D i E pozwala określić transformatę Fouriera przenikalności elektrycznej $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e)$ lub względnej przenikalności elektrycznej

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}.$$

W ośrodku dyspersyjnym równanie falowe dla danej częstości przybiera postać

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\varepsilon} \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

i ma rozwiązanie w postaci fali płaskiej

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

z zespoloną liczbą falową

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon} \mu_0}.$$

Oddzielając w \tilde{k} część rzeczywistą od urojonej

$$\tilde{k} = k + i\alpha$$

otrzyma się

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do $E^2 \sim \exp(-2\alpha z)$, przy czym

$$\alpha = 2\alpha$$

nazywa się współczynnikiem absorpcji.

Prędkość fazowa wynosi ω/k , a współczynnik załamania jest równy

$$n = \frac{ck}{\omega}.$$

Tym razem część rzeczywista i urojona określone są przez parametry wprowadzonego modelu oscylatorowego. Dla gazów suma w wyrażeniu na $\tilde{\varepsilon}_r$ jest mała w stosunku do jedynki i pierwiastek z $\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \tilde{x}$ można przybliżyć rozwinięciem na szereg potęgowy $\sqrt{1 + \tilde{x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\tilde{x} + \dots$ z zachowaniem członu liniowego

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r} \simeq \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right].$$

Tu łatwo już oddzielić część rzeczywistą od urojonej, aby uzyskać

$$n = \frac{ck}{\omega} \simeq 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2},$$

$$\alpha = 2\kappa \simeq \frac{Nq^2\omega^2}{m\varepsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}.$$

W bezpośrednim otoczeniu częstości rezonansowej współczynnik załamania zachowuje się nietypowo. Mówimy wtedy o dyspersji anomalnej. Obszar ten pokrywa się z maksymalną absorpcją. Silne rezonansowe pobudzenie elektronów może być przyczyną nieprzezroczystości w tym zakresie częstości, gdyż duża ilość energii jest tracona w wyniku tłumienia. Dla ośrodków przezroczystych częstości rezonansowe leżą zwykle w nadfiolecie. Z dala od rezonansów można zaniedbać tłumienie. Wtedy

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}.$$

Dla $\omega < \omega_j$

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)^{-1}$$

$$\simeq \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

i współczynnik załamania opisany jest formułą

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}$$

$$+ \omega^2 \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4}.$$

Pokazuje ona, że współczynnik załamania można przybliżyć wzorem Cauchy'ego

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

z dwoma stałymi. Wzór ten dość dobrze stosuje się do gazów.

Dodatek D

Semestr letni 2003

D.1 Rozkład materiału na trzy części

1. **Elektrostatyka.** Oddziaływania elektrostatyczne. Pole elektryczne. Ciągłe rozkłady ładunku. Linie pola, strumień i prawo Gaussa. Zastosowania prawa Gaussa. Potencjał elektryczny. Korzyści z posługiwania się potencjałem. **Warunki brzegowe w elektrostatyce.** Praca i energia w elektrostatyce. Przewodniki. Ładunki powierzchniowe i indukowane. Równanie Laplace'a. Metoda rozdzielania zmiennych. Rozwinięcie multipolowe. **Elektrostatyka ośrodków makroskopowych.** Polaryzacja elektryczna. Pole ciała spolaryzowanego. Ładunki związane. Pole w dielektryku. Pole indukcji elektrycznej. Prawo Gaussa w obecności dielektryków. Zagadnienia brzegowe. **Magnetostatyka.** Siła Lorentza. Pole indukcji magnetycznej \mathbf{B} . Prądy. Prawo Biot-Savarta. Prawo Ampère'a. **Magnetyczny potencjał wektorowy.** Magnetyczne warunki brzegowe. Prądy związane. Pole magnetyczne \mathbf{H} . (2003.03.25)
2. **Pola zmienne w czasie.** Siła elektromotoryczna. Indukcja elektromagnetyczna. Prawo Faradaya. Indukcyjność. Energia pola magnetycznego. Równania Maxwella w materii. Warunki brzegowe. **Prawa zachowania.** Ładunek i energia. Równanie ciągłości. Twierdzenie Poyntinga. Zasada zachowania pędu. Moment pędu. **Elektromagnetyczne fale płaskie** i rozchodzenie się fal. Równanie falowe w jednym wymiarze. Fale monochromatyczne płaskie w próżni. **Fale elektromagnetyczne w liniowym ośrodku materialnym.** Odbicie i załamanie. Fale elektromagnetyczne w przewodnikach. Odbicie na powierzchni przewodzącej. **Potencjały i pola źródeł zmiennych w czasie.** Potencjał skalarny i wektorowy. Przekształcenia cechowania. Potencjały opóźnione. (2003.05.13; 2003.05.15)

3. **Pole elektryczne i magnetyczne** poruszającego się ładunku punkowego. **Szczególna teoria względności**. Przykłady. **Elektrodynamika w postaci jawnie relatywistycznej**. Dynamika cząstek relatywistycznych i pola elektromagnetycznego. **Promieniowanie** elektryczne dipolowe. **Podsumowanie** elektrodynamiki.
(2003.06.10)

Literatura

- [1] David J. Griffith, Podstawy elektrodynamiki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
- [2] J.D. Jackson, Elektrodynamika klasyczna, cz.1 i 2, PWN, Warszawa 1987.
- [3] A.N. Matwiejew, Teoria pola elektromagnetycznego, PWN, Warszawa 1967.
- [4] L.D. Landau, E. Lifszyc, Krótki kurs fizyki teoretycznej: Mechanika Elektrodynamika, t.1, PWN, Warszawa 1972.
- [5] Frederick W. Byron, Robert W. Fuller, Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej, tom1 i 2, PWN, Warszawa 1974.
- [6] I.M. Ryżyk, I.S. Gradsztein, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964.
- [7] Wolfram Research, *Mathematica*©4 Program for doing Mathematics, www.wolfram.com, 1998-1999.