I zestaw zadań z fizyki atomowej
(Metody matematyczne fizyki atomowej)

1. Korzystając z funkcji tworzącej dla uogólnionych wielomianów Laguerre'a, pokazać, że

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^\gamma \mathrm{e}^{-cx} L_m^{(\alpha)}(ax) L_n^{(\beta)}(bx)$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{m!n!} \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} (1-s)^{-\alpha-1}(1-t)^{-\beta-1} \left(c + \frac{as}{1-s} + \frac{bt}{1-t} \right)^{-\gamma-1} \Bigg|_{s=0,t=0}$$
$$(a, b, c > 0;\ \alpha, \beta, \gamma > -1).$$

2. Korzystając z wyniku zadania poprzedniego, pokazać, że

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^\gamma \mathrm{e}^{-ax} L_m^{(\alpha)}(ax) L_n^{(\beta)}(ax)$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{a^{\gamma+1}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-)^{k+m+n} \begin{pmatrix} -\gamma-1 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma-\alpha \\ m-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma-\beta \\ n-k \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{a^{\gamma+1}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-)^{m+n} \begin{pmatrix} \gamma+k \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma-\alpha \\ m-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma-\beta \\ n-k \end{pmatrix}$$
$$(a > 0;\ \alpha, \beta, \gamma > -1).$$

Wskazówka: Przy dowodzie drugiej równości można skorzystać z następującej własności dwumianu Newtona:

$$\begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix} = (-)^n \begin{pmatrix} n-z-1 \\ n \end{pmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{C}).$$

3. Korzystając z wyniku zadania poprzedniego, pokazać, że

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\alpha n!} \qquad (\nu = \min(m,n);\ \alpha > 0),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{\alpha} \mathrm{e}^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{mn} \qquad (\alpha > -1),$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{\alpha+1} \mathrm{e}^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n-1)!} \delta_{m,n-1} + \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(\alpha+2n+1)}{n!} \delta_{mn} - \frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{n!} \delta_{m,n+1} \qquad (\alpha > -1).$$

4. Sformułować i udowodnić twierdzenie Hellmanna-Feynmana.

5. Stosując rachunek zaburzeń, znaleźć poprawki pierwszego i drugiego rzędu do niezdegenerowanej wartości własnej $\lambda_n^{(0)}$ liniowego operatora hermitowskiego $A^{(0)}$, wywołane liniowym hermitowskim zaburzeniem $A^{(1)}$. Znaleźć także poprawkę pierwszego rzędu do wektora własnego $\Psi_n^{(0)}$ stowarzyszonego z wartością własną $\lambda_n^{(0)}$.

6. Stosując rachunek zaburzeń, znaleźć poprawki pierwszego rzędu do N-krotnie zdegenerowanej wartości własnej $\lambda_n^{(0)}$ liniowego operatora hermitowskiego $A^{(0)}$, wywołane liniowym hermitowskim zaburzeniem $A^{(1)}$. Wyznaczyć także dopasowane do zaburzenia wektory własne operatora $A^{(0)}$, stowarzyszone z wartością własną $\lambda_n^{(0)}$.